

Abzählende Kombinatorik

Stephan Klaus

Vorlesung Sommer Semester 2022

Skript: Wolfgang Schwarz

Das folgende Skript beruht auf einer Ergänzungsvorlesung gehalten von Prof. Dr. Stephan Klaus im Sommersemester 2022 an der Johannes-Gutenberg-Universität in Mainz.

Die abzählende Kombinatorik beschäftigt sich mit der Fragestellung, wieviele Möglichkeiten es für bestimmte Konstellationen gibt. Bei der Beschreibung spielen erzeugende Funktionen eine große Rolle. Hier seien einige Beispiele genannt, die auch in der Vorlesung erläutert werden.

1. Das Assoziativgesetz besagt $(xy)z = x(yz)$, daraus folgt die Unabhängigkeit von der Klammersetzung auch für mehr als 3 Faktoren. Für 4 Faktoren gibt es 5 erlaubte Arten der Klammersetzung, für 5 Faktoren bereits 14. Auf wieviele Weisen kann man Klammern in einem Produkt von n Faktoren setzen?
2. Bäume sind zusammenhängende Graphen ohne Zykel. Betrachte binäre Bäume mit n Knoten, wobei ein Knoten als "Wurzel" ausgezeichnet ist. Wieviele solcher Bäume gibt es? Die Antwort wird in beiden Fällen durch die Catalan-Zahlen gegeben, die auch in einigen anderen Zusammenhängen auftauchen. Der Beweis kann mit der erzeugenden Funktion dieser Fragestellung hergeleitet werden. Erzeugende Funktionen sind formale Potenzreihen, die mit den Anzahlen von kombinatorischen Strukturen gebildet werden. Dadurch kann man kombinatorische Eigenschaften in Funktional- oder Differentialgleichungen für erzeugende Funktionen verwandeln, die oft explizit gelöst werden können. Die Vorlesung soll anhand vieler berühmter Beispiele einen Überblick

dieser Theorie geben. Weitere Stichworte dazu sind z.B. Partitionen, Fibonacci- und Stirling-Zahlen, das Abzähltheorem von Polya, das Theorem von Witt und kombinatorische Spezies. Erzeugende Funktionen spielen in vielen Bereichen der Mathematik eine große Rolle und gehören daher zur "mathematischen Allgemeinbildung".

Inhaltsverzeichnis

1. Erzeugende Funktionen	4
1.1. Definition und Beispiel für erzeugende Funktionen	4
1.2. Begriffe aus der Mengenlehre	6
1.3. Multimengen	7
1.4. Beispiele erzeugender Funktionen	9
1.5. Exponentiell erzeugende Funktionen	12
1.6. Ableitung und Integral formaler Potenzreihen	12
2. Formale Potenzreihen	14
2.1. Ringstruktur der formalen Potenzreihen	15
2.2. Ordnung formaler Potenzreihen	16
2.3. Summe von abzählbar unendlich vielen formalen Potenzreihen	18
2.4. Komposition formaler Potenzreihen	20
2.5. Produkt von abzählbar unendlich vielen formalen Potenzreihen	21
3. Geordnete Partitionen	22
3.1. Spezielle geordnete Partitionen	22
3.2. Fibonacci-Partitionen	23
3.3. Goldener Schnitt	24
4. Ungeordnete Partitionen	27
4.1. Hauptsatz für erzeugende Funktionen von Partitionen	28
4.2. Ferrer-Diagramme	34
4.3. Spezielle ungeordnete Partitionen	35
4.4. Eulersches Pentagonalzahl-Theorem	38
4.5. Rekursionsformel für geordnete Partitionen	47
5. Stirling-Zahlen und Bell-Zahlen	48
5.1. Mengenpartitionen und Äquivalenzrelationen	48

5.2.	Stirling-Zahlen 2. Art	49
5.3.	Rekursionsformel für Stirling-Zahlen 2. Art	50
5.4.	Exponentiell erzeugende Funktionen für Stirling-Zahlen 2. Art	51
5.5.	Summenformel für Stirling-Zahlen 2. Art	53
5.6.	Bell-Zahlen	53
5.7.	Exponentiell erzeugende Funktionen für Bell-Zahlen	53
5.8.	Rekursionsformel für Bell-Zahlen	54
5.9.	Dopinskis Formel für Bell-Zahlen	55
5.10.	Anzahl aller surjektiven Abbildungen endlicher Mengen	56
5.11.	Absteigende Potenzen	57
5.12.	Basiswechsel zwischen Potenzen und absteigenden Potenzen	57
5.13.	Stirling-Zahlen 1. Art und Permutationen	58
5.14.	Der 12-fache Weg	59
6.	Catalan-Zahlen	60
6.1.	Rekursionsformel für Catalan-Zahlen	61
6.2.	Explizite Formel für Catalan-Zahlen	61
6.3.	Andere Deutungen der Catalan-Zahlen	64
6.3.1.	Ebene, binäre Bäume mit Wurzel	64
6.3.2.	Dyck Worte	64
6.3.3.	Triangulierungen von Polygonen	67
6.3.4.	Ebene, triadische Bäume mit Wurzel	68
6.3.5.	Markierte Kohlenwasserstoffe	68
7.	Der Abzählsatz von Polya	70
7.1.	Gruppenoperation	70
7.2.	Bahn-Standardgruppen Satz	72
7.3.	Lemma von Burnside	77
7.4.	Beispiel: Färbungen eines Würfels	78
7.5.	Zykelindikator	80
7.6.	Abzählsatz von Polya	85
7.7.	Anwendungsbeispiele für den Abzählsatz von Polya	90
A.	Tabelle der Fibonacci-Zahlen	103
B.	Tabelle der Graphen	105
C.	Notationen	106

1. Erzeugende Funktionen

1.1. Definition und Beispiel für erzeugende Funktionen

Definition 1.1. Sei A_n eine Folge von endlichen Mengen und $a_n = |A_n| \in \mathbb{N}$ deren Ordnung. Dann heißt die formale Potenzreihe

$$f_A(t) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n \in \mathbb{Z}[[t]]$$

erzeugende Funktion der Folge A_n beziehungsweise a_n .

Beispiel 1.2. Geordnete Partitionen

Die Menge der geordneten Partitionen von n und ihre Anzahl bezeichnen wir mit:

$$G_n := \{ (n_1, \dots, n_k) \mid n = n_1 + \dots + n_k, k \in \mathbb{N}, n_i \in \mathbb{N}^+ \} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$
$$g_n := |G_n|$$

Zur Veranschaulichung führen wir hier die ersten 5 Mengen von geordneten Partitionen an. Dabei ist zu beachten, dass $n = 0$ nur die leere Partition ($k = 0$) zulässt.

$$G_0 = \{ () \}$$

$$\Rightarrow g_0 = 1$$

$$G_1 = \{ (1) \}$$

$$\Rightarrow g_1 = 1$$

$$G_2 = \{ 2, 1+1 \}$$

$$\Rightarrow g_2 = 2$$

$$G_3 = \{ 3, 2+1, 1+2, 1+1+1 \}$$

$$\Rightarrow g_3 = 4$$

$$G_4 = \{ 4, 3+1, 1+3, 2+2, 2+1+1, 1+2+1, 1+1+2, 1+1+1+1 \}$$

$$\Rightarrow g_4 = 8$$

Die ersichtliche Gesetzmäßigkeit wird in folgendem Satz formuliert und bewiesen. Die Beweisführung in der Kombinatorik erfolgt sehr häufig durch drei Methoden:

1. Rekursive Methode (Induktion)
2. Durch Bijektion zu einer bekannten Situation
3. Mit erzeugenden Funktionen

Satz 1.3. Die Anzahl von geordneten Partitionen G_n ist

$$g_n = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ 2^{n-1} & \text{für } n > 0 \end{cases}$$

Beweis. Der Fall $n = 0$ folgt direkt aus der Definition. Den Fall $n = 1$ haben wir im Beispiel gezeigt.

Für $n \geq 2$ geben wir zwei verschiedene Beweise: erstens mit der rekursiven Methode und zweitens durch Bijektion.

1. Induktion

Sei (n_1, n_2, \dots, n_k) eine beliebige Partition von n . Dann gilt

$$\begin{aligned} & n_1 + n_2 + \dots + n_k = n \\ \Rightarrow & \begin{cases} n_2 + \dots + n_k = n - 1 & \text{für } n_1 = 1 \\ (n_1 - 1) + n_2 + \dots + n_k = n - 1 & \text{für } n_1 > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Umgekehrt kann man aus einer Partition von $n - 1$ auf zwei verschiedene Weisen eine Partition von n bilden:

- a) durch Voranstellen einer 1 oder
- b) durch Addition von 1 zur ersten Zahl.

Dadurch erhält man eine Bijektion von G_n zur disjunkten Summe von G_{n-1} mit G_{n-1} . Das heisst G_n ist doppelt so groß wie G_{n-1} . Mit der Induktionsvoraussetzung $g_{n-1} = 2^{n-2}$ erhalten wir die Behauptung

$$g_n = 2 \cdot g_{n-1} = 2 \cdot 2^{n-2} = 2^{n-1}$$

2. Bijektion

Eine beliebige Partition (n_1, n_2, \dots, n_k) von n kann wie folgt geschrieben werden:

$$\underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{n_1 \text{mal}}, \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{n_2 \text{mal}}, \dots, \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{n_k \text{mal}}$$

Dies ist eine Folge von n Einsen getrennt durch $n - 1$ Zeichen ”+” oder ”,”. Dadurch ist eine 1-1 Zuordnung oder Bijektion zwischen der Partition G_n und den

Abbildungen $Map([n-1], \{ "+", ",", " " \})$ gegeben.

$$\begin{aligned} G_n &\longleftrightarrow Map([n-1], \{ "+", ",", " " \}) \\ \Rightarrow |G_n| &= |Map([n-1], \{ "+", ",", " " \})| \\ &= 2^{n-1} \end{aligned}$$

□

1.2. Begriffe aus der Mengenlehre

Die grundlegenden Begriffe der Mengenlehre wie Teilmengen, Vereinigung und Durchschnitt werden als bekannt vorausgesetzt.

Definition 1.4. 1. Die Menge aller Teilmengen einer Menge X heisst Potenzmenge und wird wie folgt bezeichnet:

$$\mathcal{P}(X) := \{ Y \subseteq X \}$$

2. Für eine Teilmenge $Y \subseteq X$ heisst die folgende Abbildung charakteristische Funktion:

$$\begin{aligned} \chi_Y : X &\longrightarrow \{0, 1\} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x \notin Y \\ 1 & \text{für } x \in Y \end{cases} \end{aligned}$$

3. Für zwei Mengen A und B bezeichnet

$$Map(A, B) = \{ f : A \rightarrow B \mid f \text{ Abbildung} \}$$

die Menge aller Abbildungen von A nach B .

Proposition 1.5. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(X) &\longrightarrow Map(X, \{0, 1\}) \\ Y &\longmapsto \chi_Y \end{aligned}$$

ist eine Bijektion.

Beweis. Der Beweis folgt direkt aus der Definition der charakteristischen Funktion. □

Korollar 1.6. *Die Ordnung der Potenzmenge einer n -elementigen Menge X ist*

$$|\mathcal{P}(X)| = 2^n$$

Definition 1.7. 1. Seien X und Y zwei Mengen. Dann bilden alle Paare (x, y) mit $x \in X$ und $y \in Y$ das kartesische Produkt oder die Produktmenge.

$$X \times Y := \{ (x, y) \mid x \in X, y \in Y \}$$

2. Eine Teilmenge $R \subseteq \mathcal{P}(X \times Y)$ der Potenzmenge des kartesischen Produktes heisst Relation.
3. Eine Relation $f \subseteq \mathcal{P}(X \times Y)$ ist eine Funktion oder Abbildung, wenn jedes $x \in X$ nur einmal in einem Paar (x, y) auftritt. Für $(x, y) \in f$ schreibt man auch $y = f(x)$.

Proposition 1.8. Seien X und Y zwei Mengen mit den Ordnungen $|X| = n$ und $|Y| = m$. Dann gibt es $2^{n \cdot m}$ Relationen und m^n Funktionen.

Beweis. Das kartesische Produkt von X und Y hat die Ordnung $n \cdot m$. Nach Korollar 1.6 hat die Produktmenge $X \times Y$ dann $2^{n \cdot m}$ Teilmengen, was nach Definition der Anzahl der Relationen entspricht.

Bei einer Funktion f gibt es für jedes Element $x_i \in X$ m Möglichkeiten, ein Element $y_j \in Y$ mit $y_j = f(x_i)$ auszuwählen. Somit gibt es m^n Funktionen. \square

Bemerkung 1.9. Falls $X = \emptyset$ und $Y = \emptyset$ leere Mengen sind, ist die Potenzmenge des kartesischen Produkts

$$\mathcal{P}(\emptyset \times \emptyset) = \{ \emptyset \}$$

Die der leeren Menge \emptyset entsprechende Relation heisst leere Relation; sie ist eine Funktion. Daraus folgt, dass

$$0^0 = 1$$

wohldefiniert ist und nicht als Sonderfall definiert werden muss.

1.3. Multimengen

In der Kombinatorik werden häufig Abwandlungen von Potenzmengen betrachtet. Insbesondere benötigt man auch Teilmengen, in denen Elemente mehrfach vorkommen, die jedoch keine Tupel sind.

Definition 1.10. 1. Die Menge aller k -elementigen Teilmengen einer Menge X wird wie folgt bezeichnet:

$$\mathcal{P}_k(X) := \{ Y \subseteq X \mid |Y| = k \}$$

2. Teilmengen, in denen Elemente mehrfach vorkommen dürfen, bezeichnet man als Multimengen. Die Menge aller Multimengen ist gegeben durch:

$$\hat{\mathcal{P}}(X) := \text{Map}(X, \mathbb{N})$$

3. Die Menge aller k -elementigen Multimengen ist gegeben durch:

$$\hat{\mathcal{P}}_k(X) := \left\{ \chi : X \rightarrow \mathbb{N} \mid \sum_{x \in X} \chi(x) = k \right\}$$

Satz 1.11. Die Menge aller k -elementigen Teilmengen einer n -elementigen Menge X hat die Ordnung

$$|\mathcal{P}_k(X)| = \binom{n}{k}$$

Beweis. Wir betrachten zunächst die Auswahl von k Elementen aus X unter Berücksichtigung der Reihenfolge. Für das erste Element gibt es n Möglichkeiten. Für jedes weitere Element jeweils eine Möglichkeit weniger. Das ergibt insgesamt

$$n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Da bei Teilmengen die Anordnung keine Rolle spielt, gibt es also

$$\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$$

k -elementige Teilmengen in X . □

Beispiel 1.12. Beispiel für 3-elementige Multimengen in $\{1, 2\}$.

$$\hat{\mathcal{P}}_3([2]) = \{ \langle 1, 1, 1 \rangle, \langle 1, 1, 2 \rangle, \langle 1, 2, 2 \rangle, \langle 2, 2, 2 \rangle \}$$

Satz 1.13. Die Menge aller k -elementigen Multimengen von $[n]$ hat die Ordnung

$$|\hat{\mathcal{P}}_k([n])| = \binom{n+k-1}{k}$$

Beweis. Sei $\langle i_1, i_2, \dots, i_k \rangle$ eine k -Multimenge in $\hat{\mathcal{P}}_k([n])$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass die Zahlen i_l aufsteigend geordnet sind.

$$1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n$$

Wir definieren

$$j_l = i_l + l - 1$$

und erhalten

$$1 \leq \underbrace{i_1}_{=j_1} < \underbrace{i_2 + 1}_{=j_2} < \cdots < \underbrace{i_k + k - 1}_{=j_k} \leq n + k - 1$$

Dies definiert eine Abbildung

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{P}}_k([n]) &\longrightarrow \mathcal{P}_k([n + k - 1]) \\ \langle i_1, i_2, \dots, i_k \rangle &\longmapsto \{j_1, j_2, \dots, j_k\} \\ &\text{mit } j_l = i_l + l - 1 \end{aligned}$$

Da umgekehrt

$$i_l = j_l - l + 1$$

gilt, ist diese Abbildung bijektiv. Beide Mengen haben also dieselbe Ordnung und nach Satz 1.11 gilt:

$$|\hat{\mathcal{P}}_k([n])| = \binom{n + k - 1}{k}$$

□

1.4. Beispiele erzeugender Funktionen

Im vorigen Abschnitt 1.2 haben wir einige Folgen von endlichen Mengen kennengelernt. Für diese untersuchen wir nun die erzeugenden Funktionen.

Satz 1.14. *Die Folge der geordneten Partitionen aus Beispiel 1.2*

$$G_n = \{ (n_1, \dots, n_k) \mid n = n_1 + \dots + n_k, k \in \mathbb{N}, n_i \in \mathbb{N}^+ \}$$

hat die erzeugende Funktion

$$f_{G_n}(t) = \frac{1 - t}{1 - 2 \cdot t}$$

Beweis. Nach Satz 1.3 ist die Anzahl geordneter Partitionen

$$g_n = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ 2^{n-1} & \text{für } n > 0 \end{cases}$$

Damit erhalten wir für die erzeugende Funktion nach Definition 1.1

$$\begin{aligned} f_{G_n}(t) &= 1 + t + 2t^2 + 4t^3 + 8t^4 + \dots \\ &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} 2^n t^{n+1} \\ &= 1 + t \sum_{n=0}^{\infty} (2t)^n \\ &= 1 + t(1 - 2t)^{-1} \\ &= \frac{1 - t}{1 - 2 \cdot t} \end{aligned}$$

□

Satz 1.15. Sei $m \in \mathbb{N}$ fest gegeben. Die Folge $\mathcal{P}_n([m])$ von n -elementigen Teilmengen in $[m]$ hat die erzeugende Funktion

$$f_{\mathcal{P}_n([m])}(t) = (1 + t)^m$$

Beweis. Nach Satz 1.11 gilt

$$|\mathcal{P}_n([m])| = \binom{m}{n}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{P}_n([m])}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} t^n \\ &= (1 + t)^m \end{aligned}$$

□

Satz 1.16. Sei $m \in \mathbb{N}$ fest gegeben. Die Folge $\hat{\mathcal{P}}_n([m])$ von n -elementigen Multimengen in $[m]$ hat die erzeugende Funktion

$$f_{\hat{\mathcal{P}}_n([m])}(t) = (1 - t)^{-m}$$

Beweis. Für Binomialkoeffizienten gilt die Berechnungsformel

$$\binom{x}{n} = \frac{x \cdot (x - 1) \cdot \dots \cdot (x - n + 1)}{n!}$$

Daraus folgt für $x = -m$

$$\begin{aligned} \binom{-m}{n} &= \frac{(-m) \cdot (-m-1) \cdots (-m-n+1)}{n!} \\ &= (-1)^n \cdot \frac{(m) \cdot (m+1) \cdots (m+n-1)}{n!} \\ &= (-1)^n \cdot \binom{m+n-1}{n} \end{aligned}$$

Mit Satz 1.13 erhalten wir für die n -elementigen Multimengen in $[m]$ die erzeugende Funktion

$$\begin{aligned} f_{\hat{\mathcal{P}}_n([m])}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{n} t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-m}{n} t^n \\ &= (1-t)^{-m} \end{aligned}$$

□

Satz 1.17. *Vandermonde Identität*

Für Binomialkoeffizienten gilt die Identität

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i+j=k} \binom{m}{i} \cdot \binom{n}{j}$$

Beweis. Wir geben zwei unterschiedliche Beweise.

1. Durch Bijektion

Wir schreiben $[m+n]$ als disjunkte Vereinigung

$$\begin{aligned} [m+n] &= \{1, 2, \dots, m, m+1, \dots, m+n, \} \\ &= [m] \sqcup [n] \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für die Mengen der k -elementigen Teilmengen:

$$\mathcal{P}_k([m+n]) = \bigsqcup_{i+j=k} \mathcal{P}_i([m]) \times \mathcal{P}_j([n])$$

Nach Satz 1.11 folgt aus deren Ordnung die Behauptung.

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i+j=k} \binom{m}{i} \cdot \binom{n}{j}$$

2. Durch erzeugende Funktionen

Wir betrachten die Funktion $(1+t)^{m+n}$ auf zwei unterschiedliche Weisen:

$$\begin{aligned} (1+t)^{m+n} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+n}{k} t^k \\ (1+t)^m \cdot (1+t)^n &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{m}{i} t^i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} t^j \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} \binom{m}{i} \cdot \binom{n}{j} \right) t^k \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt wieder die Behauptung.

□

1.5. Exponentiell erzeugende Funktionen

Für manche Betrachtungen sind exponentiell erzeugende Funktionen besser geeignet als gewöhnliche erzeugende Funktionen.

Definition 1.18. Sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ eine Folge rationaler Zahlen. Dann heißt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$$

exponentiell erzeugende Funktion der Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Bemerkung 1.19. Eine exponentiell erzeugende Funktion der Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ entspricht einer gewöhnlichen erzeugenden Funktion der Folge $\{\hat{a}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\hat{a}_n = \frac{a_n}{n!}$.

1.6. Ableitung und Integral formaler Potenzreihen

Für formale Potenzreihen kann auch eine formale Ableitung und ein formales Integral definiert werden.

Definition 1.20. Die Ableitung einer gewöhnlichen erzeugenden Funktion von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in einem kommutativen Ring R ist definiert durch:

$$\begin{aligned} \partial : R[[t]] &\longrightarrow R[[t]] \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n &\longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n t^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \cdot (n+1) t^n \end{aligned}$$

Definition 1.21. Das Integral einer gewöhnlichen erzeugenden Funktion von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in einem Körper \mathbb{K} der Charakteristik 0 ist definiert durch:

$$\begin{aligned} \int \cdot dt : \mathbb{K}[[t]] &\longrightarrow \mathbb{K}[[t]] \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n &\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} t^{n+1} \end{aligned}$$

Definition 1.22. Die Ableitung einer exponentiell erzeugenden Funktion von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in einem Körper \mathbb{K} der Charakteristik 0 ist definiert durch:

$$\begin{aligned} \partial : \mathbb{K}[[t]] &\longrightarrow \mathbb{K}[[t]] \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n &\longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \cdot n t^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n-1)!} t^{n-1} \end{aligned}$$

Definition 1.23. Das Integral einer exponentiell erzeugenden Funktion von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in einem Körper \mathbb{K} der Charakteristik 0 ist definiert durch:

$$\begin{aligned} \int \cdot dt : \mathbb{K}[[t]] &\longrightarrow \mathbb{K}[[t]] \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n &\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)!} t^{n+1} \end{aligned}$$

Bemerkung 1.24. Alle Regeln aus der Analysis gelten auch für die hier definierten Ableitungen und Integrale. Zum Beispiel die Produktregel:

$$\partial(f(t) \cdot g(t)) = \partial f(t) \cdot g(t) + f(t) \cdot \partial g(t)$$

Bemerkung 1.25. Die Ableitung macht die Integration rückgängig:

$$\partial\left(\int f(t)dt\right) = f(t)$$

Umgekehrt gilt jedoch:

$$\int(\partial f(t))dt = f(t) - a_0$$

2. Formale Potenzreihen

Im Abschnitt 1.1 haben wir erzeugende Funktionen bereits als formale Potenzreihen kennen gelernt. Nun befassen wir uns näher mit der Struktur der Potenzreihen.

Definition 2.1. Sei R ein kommutativer Ring mit 1 (zum Beispiel \mathbb{Z}). Eine formale Potenzreihe ist gegeben durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \quad \text{mit } a_n \in R$$

Die Menge aller formalen Potenzreihen über R wird mit

$$R[[t]]$$

bezeichnet.

Bemerkung 2.2. Eine formale Potenzreihe kann mit der Folge ihrer Koeffizienten $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ identifiziert werden. Man kann also definieren:

$$R[[t]] := \text{Map}(\mathbb{N}, R)$$

Anders als bei den Potenzreihen in der Analysis spielt Konvergenz hier keine Rolle.

Beispiel 2.3. Die formale Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n t^n$$

hat den Konvergenzradius

$$\begin{aligned}\varrho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \\ &= 0\end{aligned}$$

2.1. Ringstruktur der formalen Potenzreihen

Bemerkung 2.4. Mit der komponentenweise Addition

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) t^n$$

und der Multiplikation (Cauchy Produkt)

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} b_j t^j &= \sum_{i,j=0}^{\infty} a_i \cdot b_j t^{i+j} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} a_i \cdot b_j \right) t^n\end{aligned}$$

wird die Menge der formalen Potenzreihen wieder ein Ring. Wenn R ein kommutativer Ring mit 1 ist, dann ist der Ring der formalen Potenzreihen $R[[t]]$ auch ein kommutativer Ring mit 1.

Satz 2.5. Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Dann ist eine formale Potenzreihe $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ genau dann invertierbar (das heisst eine Einheit), wenn $a_0 \in R$ invertierbar (das heisst eine Einheit) ist.

Beweis. \implies Sei $f(t)$ invertierbar. Dann gibt es eine Potenzreihe $g(t) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j t^j$ mit

$$\begin{aligned}f(t) \cdot g(t) &= 1 \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \cdot \sum_{j=0}^{\infty} b_j t^j &= 1 \\ \implies a_0 \cdot b_0 &= 1\end{aligned}$$

Also ist a_0 invertierbar.

\impliedby Sei a_0 invertierbar. Dann gibt es ein $b_0 \in R$ mit $a_0 \cdot b_0 = 1$. Damit haben wir den

ersten Koeffizienten einer Potenzreihe $g(t) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j t^j$ gefunden, für die gilt:

$$f(t) \cdot g(t) = 1$$

Die weiteren Koeffizienten können durch Koeffizientenvergleich bestimmt werden:

$$\begin{aligned} & a_1 \cdot b_0 + a_0 \cdot b_1 \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow & b_1 = -a_0^{-1} \cdot a_1 \cdot b_0 \\ & a_2 \cdot b_0 + a_1 \cdot b_1 + a_0 \cdot b_2 \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow & b_2 = -a_0^{-1} \cdot (a_2 \cdot b_0 + a_1 \cdot b_1) \\ & \dots \end{aligned}$$

Allgemein gilt:

$$b_n = -a_0^{-1} \cdot (a_n \cdot b_0 + a_{n-1} \cdot b_1 + \dots + a_1 \cdot b_{n-1})$$

Daraus können die Koeffizienten b_n der inversen Potenzreihe $g(t) = f(t)^{-1}$ rekursiv berechnet werden.

□

2.2. Ordnung formaler Potenzreihen

Definition 2.6. Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und $R[[t]]$ der Ring der formalen Potenzreihen. Dann heisst das Ideal

$$\begin{aligned} J & := t \cdot R[[t]] \\ & = \left\{ f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot t^i \right\} \end{aligned}$$

Augmentationsideal.

Bemerkung 2.7. Das Augmentationsideal J ist der Kern des Ringhomomorphismus

$$\begin{aligned} \epsilon : R[[t]] & \longrightarrow R \\ f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot t^i & \longmapsto a_0 \end{aligned}$$

Der Ringhomomorphismus ϵ wird auch Augmentation genannt.

Definition 2.8. Die Ordnung einer formalen Potenzreihe $f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot t^i$ ist definiert

durch

$$\text{ord}(f) := \begin{cases} \infty & \text{für } f = 0 \\ \min\{i \in \mathbb{N} \mid a_i \neq 0\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel 2.9.

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2 + 3t^3 - t^5 + \dots \\ \Rightarrow \text{ord}(f) &= 2 \end{aligned}$$

Bemerkung 2.10. Eine formale Potenzreihe $f(t)$ der Ordnung $\text{ord}(f) = n$ ist Element der n -ten Potenz des Augmentationsideals.

$$\text{ord}(f) = n \quad \Rightarrow \quad f \in J^n$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} J^n &= \left\{ \prod_{j=1}^n g_j \mid g_j \in J \right\} \\ &= \left\{ g(t) = \sum_{i=n}^{\infty} a_i \cdot t^i \right\} \end{aligned}$$

Proposition 2.11. Die Ordnungen formaler Potenzreihen haben bezüglich Addition und Multiplikation folgende Eigenschaften:

a)

$$\text{ord}(f + g) \geq \min\{\text{ord}(f), \text{ord}(g)\}$$

Für $\text{ord}(f) \neq \text{ord}(g)$ gilt sogar Gleichheit.

b)

$$\text{ord}(f \cdot g) \geq \text{ord}(f) + \text{ord}(g)$$

In nullteilerfreien Ringen gilt sogar Gleichheit.

Beweis. Die formalen Potenzreihen f und g seien gegeben durch

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{i=n}^{\infty} a_i \cdot t^i \\ g(t) &= \sum_{i=m}^{\infty} b_i \cdot t^i \end{aligned}$$

mit den Ordnungen

$$\begin{aligned} \text{ord}(f) &= n \\ \text{ord}(g) &= m \end{aligned}$$

ad a) Für die Ordnung der Summe von f und g gilt:

$$\begin{aligned} f(t) + g(t) &= \sum_{i=\min\{n,m\}}^{\infty} (a_i + b_i) \cdot t^i \\ \Rightarrow \text{ord}(f + g) &\geq \min\{n, m\} \end{aligned}$$

Nur für gleiche Ordnungen $n = m$ und $a_n = -b_n$ hebt sich der führende Koeffizient $a_n + b_n$ weg und die Ordnung der Summe wird dadurch größer. Im Extremfall stimmen alle Koeffizienten von g mit den negativen Koeffizienten von f überein. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(t) + g(t) &= \sum_{i=n}^{\infty} (a_i - a_i) \cdot t^i \\ &= 0 \\ \Rightarrow \text{ord}(f + g) &= \infty \end{aligned}$$

ad b) Für die Ordnung des Produkts von f und g erhalten wir:

$$\begin{aligned} f(t) \cdot g(t) &= a_n \cdot b_m \cdot t^{n+m} + \dots \\ \Rightarrow \text{ord}(f \cdots g) &\geq n + m \end{aligned}$$

In nullteilerfreien Ringen gilt hier stets Gleichheit, da hier aus $a_n \neq 0$ und $b_m \neq 0$ auch $a_n \cdot b_m \neq 0$ folgt.

□

2.3. Summe von abzählbar unendlich vielen formalen Potenzreihen

In Abschnitt 2.1 wurde die Addition und Multiplikation formaler Potenzreihen betrachtet. Der folgende Satz macht eine Aussage, unter welchen Bedingungen die Summe von abzählbar unendlich vielen formalen Potenzreihen wieder eine formale Potenzreihe ist.

Satz 2.12. Sei $f_n(t)$ eine Folge formaler Potenzreihen in $R[[t]]$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{ord}(f_n) = \infty$$

Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$ wieder eine formale Potenzreihen in $R[[t]]$.

Beweis. Für ein beliebiges $m \in \mathbb{N}$ betrachten wir den Koeffizienten von t^m in der Summe. Nach Voraussetzung gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\text{ord}(f_n) > m$ für alle $n > n_0$ gilt. Das heisst, es gibt nur endlich viele Summanden f_n mit kleineren Ordnungen. Die Summe der Koeffizienten von t^m ist daher endlich. \square

Beispiel 2.13. Als Beispiel betrachten wir folgende Potenzreihen:

$$f_n(t) = (t + t^2 + t^3 + \dots)^n = t^n \cdot (1 - t)^{-n}$$

Diese haben die Ordnung $\text{ord}(f_n) = n$. Da $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{ord}(f_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$ gilt, ist $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$ wieder eine formale Potenzreihen in $R[[t]]$. Diese berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (t + t^2 + t^3 + \dots)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{1-t}\right)^n \\ &= \frac{1}{1 - \frac{t}{1-t}} \\ &= \frac{1-t}{1-2t} \end{aligned}$$

Die formale Potenzreihe ergibt sich daraus durch Division.

$$\begin{array}{r} 1 - t \\ 1 - 2t \\ \hline t \\ t - 2t^2 \\ \hline 2t^2 \\ 2t^2 - 4t^3 \\ \hline 4t^3 \\ \dots \end{array} \quad : \quad 1 - 2t = 1 + t + 2t^2 + 4t^3 + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \cdot t^n$$

Wie im Abschnitt 2.1 kann auch für exponentiell erzeugende Funktionen eine komponentenweise Addition und folgende Multiplikation definiert werden.

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{t^i}{i!}\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j \frac{t^j}{j!}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^n}{n!} \quad \text{mit} \\ c_n &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} a_i \cdot b_{n-i} \end{aligned}$$

2.4. Komposition formaler Potenzreihen

Aus der Analysis ist bekannt, dass die Komposition von Funktionen, die sich als Taylorreihen darstellen lassen, wieder durch eine Taylorreihe dargestellt werden kann. Dies gilt auch für formale Potenzreihen unter der Voraussetzung, dass die eingesetzte Funktion mindestens die Ordnung 1 hat, also im Augmentationsideal liegt.

Definition 2.14. Sei $f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot t^i \in R[[t]]$ eine formale Potenzreihe und $g(t) = \sum_{n=j}^{\infty} b_j \cdot t^j \in J$ eine formale Potenzreihe mit Ordnung $\text{ord}(g) \geq 1$. Das heisst g liegt im Augmentationsideal. Dann ist die Komposition definiert durch

$$(f \circ g)(t) := f(g(t)) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j \cdot t^j \right)^i$$

Proposition 2.15. Die Komposition von zwei formalen Potenzreihen aus Definition 2.14 existiert rein algebraisch in $R[[t]]$.

Beweis. Zum Beweis wird g in f eingesetzt, ausmultipliziert und die Koeffizienten neu sortiert.

$$\begin{aligned} (f \circ g)(t) &= a_0 \\ &\quad + a_1 \cdot (b_1 \cdot t + b_2 \cdot t^2 + \dots) \\ &\quad + a_2 \cdot (b_1 \cdot t + b_2 \cdot t^2 + \dots)^2 \\ &\quad + a_3 \cdot (b_1 \cdot t + b_2 \cdot t^2 + \dots)^3 + \dots \\ &= a_0 \\ &\quad + a_1 b_1 t \\ &\quad + (a_1 b_2 + a_2 b_1^2) \cdot t^2 \\ &\quad + (a_1 b_3 + 2a_2 b_1 b_2 + a_3 b_1^3) \cdot t^3 \dots \end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.16. Die Voraussetzung, dass g aus dem Augmentationsideal ist, also $\text{ord}(g) \geq 1$ oder $b_0 = 0$, ist wichtig, da sonst der Koeffizient von t^0 bereits unendlich viele Summanden $a_0 + a_1 b_0 + a_2 b_0^2 + a_3 b_0^3 + \dots$ hätte.

Bemerkung 2.17. Das neutrale Element bezüglich der Komposition ist die Potenzreihe $g(t) = t$. Diese entspricht der identischen Funktion

$$\mathbf{1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

in der Analysis.

Die Komposition von gewöhnlichen erzeugenden Funktionen kann auch auf exponentiell erzeugende Funktionen übertragen werden.

2.5. Produkt von abzählbar unendlich vielen formalen Potenzreihen

In Abschnitt 2.1 wurde die Addition und Multiplikation formaler Potenzreihen betrachtet. Der folgende Satz macht eine Aussage, unter welchen Bedingungen das Produkt von abzählbar unendlich vielen formalen Potenzreihen wieder eine formale Potenzreihe ist.

Satz 2.18. Sei $f_n(t)$ eine Folge formaler Potenzreihen in $R[[t]]$ mit $\text{ord}(f_n) \geq 1$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{ord}(f_n) = \infty$$

Dann ist das Produkt $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(t))$ wieder eine formale Potenzreihen in $R[[t]]$.

Beweis. Zum Beweis wird die Multiplikation ausgeführt.

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(t)) &= (1 + f_1(t)) \cdot (1 + f_2(t)) \cdot (1 + f_3(t)) \cdots \\ &= (1 + f_1(t) + f_2(t) + f_1(t) \cdot f_2(t)) \cdot (1 + f_3(t)) \cdots \\ &= (1 + f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) \\ &\quad + f_1(t) \cdot f_2(t) + f_1(t) \cdot f_3(t) + f_2(t) \cdot f_3(t) \\ &\quad + f_1(t) \cdot f_2(t) \cdot f_3(t)) \cdots \\ &= 1 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)}_{=g_1(t)} \\ &\quad + \underbrace{\sum_{1 \leq n_1 < n_2 < \infty} f_{n_1}(t) \cdot f_{n_2}(t)}_{=g_2(t)} \\ &\quad + \underbrace{\sum_{1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \infty} f_{n_1}(t) \cdot f_{n_2}(t) \cdot f_{n_3}(t)}_{=g_3(t)} \\ &\quad \dots \end{aligned}$$

Die einzelnen Summen $g_i(t)$ sind nach Satz 2.12 wieder formale Potenzreihen und es gilt $\text{ord}(g_i) \geq i$, das heisst $\lim_{i \rightarrow \infty} \text{ord}(g_i) = \infty$. Also existiert nach Satz 2.12 das

Produkt. □

3. Geordnete Partitionen

In Beispiel 1.2 haben wir bereits geordnete Partitionen kennengelernt. Diese sind definiert durch

$$G_n = \{ (n_1, \dots, n_k) \mid n = n_1 + \dots + n_k, k \in \mathbb{N}, n_i \in \mathbb{N}^+ \}$$

Zur besseren Übersicht fassen wir die Ergebnisse von oben hier nochmal zusammen. Die Mächtigkeiten sind nach Satz 1.3 gegeben durch

$$g_n = |G_n| = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ 2^{n-1} & \text{für } n > 0 \end{cases}$$

Nach Satz 1.14 ist die erzeugende Funktion für geordnete Partitionen

$$\begin{aligned} g(t) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} t^n \\ &= \frac{1-t}{1-2 \cdot t} \end{aligned}$$

Mit Hilfe der charakteristischen Funktion

$$\begin{aligned} \chi_{\mathbb{N}^+} : \mathbb{N}^+ &\longrightarrow \{0, 1\} \\ n &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

kann eine geordnete Partition auch geschrieben werden als

$$G_n = \{ (n_1, \dots, n_k) \mid n = n_1 + \dots + n_k, k \in \mathbb{N}, \chi_{\mathbb{N}^+}(n_i) = 1 \}$$

3.1. Spezielle geordnete Partitionen

Wenn nun beliebige Teilmengen $I \subseteq \mathbb{N}^+$ zugelassen werden, erhält man spezielle geordnete Partitionen als Verallgemeinerung.

Definition 3.1. Sei $I \subseteq \mathbb{N}^+$ eine Teilmenge in \mathbb{N} und

$$\begin{aligned} \chi_I : \mathbb{N}^+ &\longrightarrow \{0, 1\} \\ n &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{für } n \notin I \\ 1 & \text{für } n \in I \end{cases} \end{aligned}$$

Dann ist die zugehörige Menge der speziellen geordneten Partitionen von $n \in \mathbb{N}$ gegeben durch

$$G_n^{\chi_I} := \{ (n_1, \dots, n_k) \mid n = n_1 + \dots + n_k, k \in \mathbb{N}, \chi_I(n_i) = 1 \}$$

Dabei ist die Bedingung $\chi_I(n) = 1$ äquivalent zu $n \in I$.

3.2. Fibonacci-Partitionen

Ein besonderes Beispiel für spezielle geordnete Partitionen bilden die Fibonacci-Partitionen, die auf die Fibonacci-Zahlen führen.

Beispiel 3.2. Fibonacci-Partitionen

Wird $I = \{1, 2\} =: Fib \subseteq \mathbb{N}$ gewählt, dann erhält man die Fibonacci-Partitionen G_n^{Fib} . Die Fibonacci-Zahlen sind genau deren Mächtigkeiten. Für $n = 5$ erhält man zum Beispiel

$$\begin{aligned} G_5^{Fib} &= \{ (2, 2, 1), (2, 1, 2), (1, 2, 2) \\ &\quad (2, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 1), (1, 1, 2, 1), (1, 1, 1, 2) \\ &\quad (1, 1, 1, 1, 1) \} \\ \Rightarrow g_5^{Fib} &= 8 \end{aligned}$$

Mit den vorausgehenden Mächtigkeiten, die man leicht sieht, ergibt sich die Tabelle:

n	0	1	2	3	4	5	...
g_n^{Fib}	1	1	2	3	5	8	...

Die bekannte Rekursionsformel für Fibonacci-Zahlen formulieren wir in folgendem Satz.

Satz 3.3. *Für die Mächtigkeiten der Fibonacci-Partitionen gilt folgende Rekursionsformel:*

$$g_n^{Fib} = g_{n-1}^{Fib} + g_{n-2}^{Fib} \quad n \geq 2$$

Beweis. Jede Fibonacci-Partition in G_n^{Fib} hat entweder die 1 oder die 2 als ersten Summand. Die Summe der restlichen Summanden ist demnach entweder $n - 1$ oder $n - 2$ also bilden die restlichen Summanden entweder eine Fibonacci-Partition in G_{n-1}^{Fib} oder G_{n-2}^{Fib} . Daraus folgt die behauptete Rekursionsformel. □

Nun können wir die erzeugende Funktion für die Fibonacci-Partitionen angeben.

Satz 3.4. *Die Fibonacci-Partitionen besitzen folgende erzeugende Funktion:*

$$g^{Fib}(t) = (1 - t - t^2)^{-1}$$

Beweis. Wir setzen die Rekursionsformel aus Satz 3.3 in die formale Potenzreihe der erzeugenden Funktion ein und erhalten:

$$\begin{aligned}
 g^{Fib}(t) &= 1 + t + \sum_{n=2}^{\infty} g_n^{Fib} t^n \\
 &= 1 + t + \sum_{n=2}^{\infty} (g_{n-1}^{Fib} + g_{n-2}^{Fib}) t^n \\
 &= 1 + t + t \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} g_n^{Fib} t^n}_{=g^{Fib}(t)-1} + t^2 \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} g_n^{Fib} t^n}_{=g^{Fib}(t)} \\
 g^{Fib}(t) \cdot (1 - t - t^2) &= 1 + t - t = 1
 \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

3.3. Goldener Schnitt

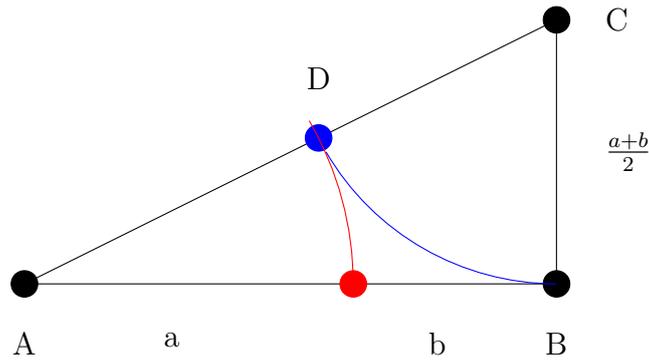
In diesem Abschnitt wird ein interessanter Zusammenhang der Fibonacci-Zahlen mit dem goldenen Schnitt beschrieben. Der goldene Schnitt war schon in der Antike bekannt. Euklid erwähnt diesen bereits um 300 v. Chr. in Zusammenhang mit seinen Untersuchungen zu platonischen Körpern und dem Fünfeck. Der goldene Schnitt fand auch immer wieder Anwendung in der Architektur. Zum Beispiel schneidet das Haupttor des alten Leipziger Rathauses die Gebäudefront im goldenen Schnitt. Der goldene Schnitt taucht aber auch in der Biologie auf: manche Pflanzen ordnen ihre Blätter in diesem Verhältnis an. Bei Sonnenblumen kann man in der Anordnung der Blütenstände Fibonacci-Spiralen erkennen, die dem goldenen Schnitt zugeordnet sind.

Weitere interessante Eigenschaften und Vorkommen des goldenen Schnitts sind in Wikipedia unter https://de.wikipedia.org/wiki/Goldener_Schnitt zu finden.

Definition 3.5. Das Verhältnis $\Phi = \frac{a}{b}$ zweier Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ heisst goldener Schnitt, wenn gilt

$$\Phi = \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$

Bemerkung 3.6. Der goldene Schnitt kann geometrisch gedeutet werden. Ein Punkt auf einer Strecke teilt diese im Verhältnis Φ des goldenen Schnitts, wenn die größere Teilstrecke sich zur kleineren Teilstrecke genauso verhält wie die gesamte Strecke zur größeren Teilstrecke. Folgende Graphik veranschaulicht dies und ist zugleich eine der vielen Konstruktionsmethoden.



Man beachte, dass die Konstruktion vollständig mit Zirkel und Linear erfolgt.

Bemerkung 3.7. Aus der Bedingung kann Φ errechnet werden.

$$\begin{aligned} \Phi &= 1 + \frac{1}{\Phi} \\ \Rightarrow \Phi^2 - \Phi - 1 &= 0 \\ \Rightarrow \Phi &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ \Phi &\approx 1,6180339887 \\ \Phi^{-1} &= \Phi - 1 \\ \Phi^{-1} &\approx 0,6180339887 \end{aligned}$$

Den Zusammenhang zwischen dem goldenen Schnitt und den Fibonacci-Zahlen stellen wir hier durch Partialbruchzerlegung der erzeugenden Funktion $g^{Fib}(t)$ der Fibonacci-Partitionen her. Nach Satz 3.4 gilt

$$g^{Fib}(t) = (1 - t - t^2)^{-1}$$

Der Nenner kann mit Hilfe von Φ faktorisiert werden.

$$\begin{aligned} (1 - \Phi t) \cdot (1 + \Phi^{-1}t) &= 1 + (\Phi^{-1} - \Phi) \cdot t - t^2 \\ &= 1 - t - t^2 \end{aligned}$$

Aus

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - t - t^2} &= \frac{\alpha}{1 - \Phi t} + \frac{\beta}{1 + \Phi^{-1}t} \\ &= \frac{\alpha(1 + \Phi^{-1}t) + \beta(1 - \Phi t)}{1 - t - t^2} \\ &= \frac{\alpha + \beta + t \cdot (\alpha\Phi^{-1} - \beta\Phi)}{1 - t - t^2} \end{aligned}$$

erhalten wir zwei Gleichungen für α und β .

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha\Phi^{-1} - \beta\Phi = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow & \alpha(\Phi + \Phi^{-1}) = \Phi \\ & \alpha = \frac{\Phi}{\Phi + \Phi^{-1}} \\ & = \frac{\Phi}{2\Phi - 1} \\ & = \frac{\Phi}{\sqrt{5}} \\ \Rightarrow & \beta = \alpha\Phi^{-2} \\ & = \frac{\Phi^{-1}}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Damit kann die erzeugende Funktion $g^{Fib}(t)$ der Fibonacci-Partitionen wieder in eine Reihe entwickelt werden.

$$\begin{aligned} g^{Fib}(t) &= (1 - t - t^2)^{-1} \\ &= \frac{\Phi}{\sqrt{5}(1 - \Phi t)} + \frac{\Phi^{-1}}{\sqrt{5}(1 + \Phi^{-1}t)} \\ &= \frac{\Phi}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \Phi^n t^n + \frac{\Phi^{-1}}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \Phi^{-n} t^n \end{aligned}$$

Für die Fibonacci-Zahlen folgt daraus:

$$g_n^{Fib} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^{n+1} + (-1)^n \Phi^{-(n+1)})$$

Da $\Phi > 1$ ist, geht der Beitrag des zweiten Summanden für große n gegen 0. Insbesondere ist dann

$$\begin{aligned} g_n^{Fib} &\approx \frac{1}{\sqrt{5}}\Phi^{n+1} \quad \text{und} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_{n+1}^{Fib}}{g_n^{Fib}} &= \Phi \end{aligned}$$

Die Konvergenz ist sehr schnell. Dies ist auch in der Tabelle in Anhang A ersichtlich.

Bemerkung 3.8. Eine Verallgemeinerung der Fibonacci-Zahlen erhält man, wenn in der Rekursionsformel mehr als zwei Summanden verwendet werden.

4. Ungeordnete Partitionen

Zu Beginn werden zwei Beispiele ungeordneter Partitionen mit ihren erzeugenden Funktionen erläutert.

Beispiel 4.1. Erzeugende Funktion von ungeordneten, "bosonischen" Partitionen

In der Physik sind Bosonen Teilchen mit ganzzahligem Spin. Mehrere ununterscheidbare Bosonen können den gleichen Zustand einnehmen. Wir werden später sehen, warum die Funktion so genannt wird.

$$p(t) := \prod_{n=1}^{\infty} (1 - t^n)^{-1}$$

Mit $(1 - t^n)^{-1} = 1 + t^n + t^{2n} + t^{3n} + \dots$ ergibt sich

$$\begin{aligned} p(t) &= (1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + \dots) \cdot (1 + t^2 + t^4 + t^6 + \dots) \\ &\quad \cdot (1 + t^3 + t^6 + \dots) \\ &\quad \cdot (1 + t^4 + t^8 + \dots) \\ &\quad \cdot (1 + t^5 + t^{10} + \dots) \dots \\ &= (1 + t + 2t^2 + 2t^3 + 3t^4 + 3t^5 + \dots) \cdot (1 + t^3 + t^6 + \dots) \\ &\quad \cdot (1 + t^4 + t^8 + \dots) \\ &\quad \cdot (1 + t^5 + t^{10} + \dots) \dots \\ &= (1 + t + 2t^2 + 3t^3 + 4t^4 + 5t^5 + \dots) \cdot (1 + t^4 + t^8 + \dots) \\ &\quad \cdot (1 + t^5 + t^{10} + \dots) \dots \\ &= (1 + t + 2t^2 + 3t^3 + 5t^4 + 6t^5 + \dots) \cdot (1 + t^5 + t^{10} + \dots) \dots \\ &= 1 + t + 2t^2 + 3t^3 + 5t^4 + 7t^5 + \dots \end{aligned}$$

Beispiel 4.2. Erzeugende Funktion von ungeordneten, "fermionischen" Partitionen

In der Physik sind Fermionen Teilchen mit halbzahligem Spin. Fermionen genügen dem Paulischen Ausschlussprinzip. Zwei Fermionen können nicht gleichzeitig an demselben Ort den gleichen Quantenzustand annehmen.

$$q(t) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + t^n)$$

Durch Ausmultiplikation ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 q(t) &= (1+t) \cdot (1+t^2) \cdot (1+t^3) \cdot (1+t^4) \cdots (1+t^{10}) \cdots \\
 &= (1+t+t^2+t^3) \cdot (1+t^3) \cdot (1+t^4) \cdots (1+t^{10}) \cdots \\
 &= (1+t+t^2+2t^3+t^4+t^5+t^6) \cdot (1+t^4) \cdots (1+t^{10}) \cdots \\
 &= 1+t+t^2+2t^3+2t^4+3t^5+4t^6+5t^7+6t^8+8t^9+10t^{10} \cdots
 \end{aligned}$$

4.1. Hauptsatz für erzeugende Funktionen von Partitionen

In den Beispielen 1.2, 4.1 und 4.2 wurden bereits verschiedene Partitionen erwähnt. Die verschiedenen Typen von Partitionen sollen hier systematisch untersucht werden. Dabei werden die Summanden einer Partition einer Teilmenge $I \subseteq \mathbb{N}^+$ entnommen. Die charakteristische Funktion von I sei

$$\begin{aligned}
 \chi : \mathbb{N}^+ &\longrightarrow \{0, 1\} \\
 n &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{für } n \notin I \\ 1 & \text{für } n \in I \end{cases}
 \end{aligned}$$

Für die charakteristische Funktion von $I = \{i_1, i_2, \dots\}$ mit $0 < i_1 < i_2 < \dots$ wird folgende formale Potenzreihe definiert:

$$\begin{aligned}
 \chi_t = \chi(t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \chi(i)t^i \\
 &= \sum_{i \in I} t^i \\
 &= t^{i_1} + t^{i_2} + \dots
 \end{aligned}$$

Definition 4.3. Über der Teilmenge $I \subseteq \mathbb{N}^+$ definieren wir folgende Typen von Partitionen:

1. Geordnete Partitionen

Die Menge der geordneten Partitionen von $n \in \mathbb{N}$ ist gegeben durch

$$G_n^X = \{ (n_1, \dots, n_k) \mid n = n_1 + \dots + n_k, k \in \mathbb{N}, n_i \in I \}$$

mit den Mächtigkeiten

$$g_n^X = |G_n^X|$$

und der erzeugenden Funktion

$$g_t^x = \sum_{n=0}^{\infty} g_n^x t^n$$

2. Ungeordnete Partitionen mit Wiederholung (bosonisch)

Die Menge der ungeordneten Partitionen von $n \in \mathbb{N}$ mit Wiederholung ist gegeben durch

$$P_n^x = \{ (n_1, \dots, n_k) \mid n = n_1 + \dots + n_k, k \in \mathbb{N}, n_i \in I, n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k \}$$

mit den Mächtigkeiten

$$p_n^x = |P_n^x|$$

und der erzeugenden Funktion

$$p_t^x = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^x t^n$$

3. Ungeordnete Partitionen ohne Wiederholung (fermionisch)

Die Menge der ungeordneten Partitionen von $n \in \mathbb{N}$ ohne Wiederholung ist gegeben durch

$$Q_n^x = \{ (n_1, \dots, n_k) \mid n = n_1 + \dots + n_k, k \in \mathbb{N}, n_i \in I, n_1 > n_2 > \dots > n_k \}$$

mit den Mächtigkeiten

$$q_n^x = |Q_n^x|$$

und der erzeugenden Funktion

$$q_t^x = \sum_{n=0}^{\infty} q_n^x t^n$$

Satz 4.4. Für die erzeugenden Funktionen der oben 4.3 definierten Partitionen gelten folgende Formeln:

1. Geordnete Partitionen

$$\begin{aligned} g_t^\chi &= (1 - \chi_t)^{-1} \\ &= 1 + \sum_{i \in I} t^i + \left(\sum_{i_1 \in I} t^{i_1} \right) \cdot \left(\sum_{i_2 \in I} t^{i_2} \right) + \dots \end{aligned}$$

2. Ungeordnete Partitionen mit Wiederholung (bosonisch)

$$\begin{aligned} p_t^\chi &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - t^n)^{-\chi(n)} \\ &= \prod_{i \in I} (1 - t^i)^{-1} \end{aligned}$$

3. Ungeordnete Partitionen ohne Wiederholung (fermionisch)

$$\begin{aligned} q_t^\chi &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 + t^n)^{\chi(n)} \\ &= \prod_{i \in I} (1 + t^i) \end{aligned}$$

Man kann alle Partitionen auch mit Multimengen $\chi : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}$ definieren. Die Formeln des Satzes gelten auch mit dieser Verallgemeinerung.

Beweis. ad 1) Nach Definition der erzeugenden Funktion gilt:

$$g_t^\chi = \sum_{n=0}^{\infty} g_n^\chi t^n \tag{*}$$

Das heisst, g_n^χ ist der Koeffizient von t^n in der formalen Potenzreihe. Für den Exponent n gibt es genau g_n^χ Möglichkeiten, ihn als Summe einer Partition in G_n^χ darzustellen. Dabei ist der Beitrag für eine Summe aus einem Summanden 1, wenn $n \in I$ beziehungsweise $\chi(n) = 1$ gilt, und 0 sonst. Bei zwei Summanden ergibt sich der Beitrag zu $\sum_{n_1+n_2=n} \chi(n_1) \cdot \chi(n_2)$. Denn nur für $n_1, n_2 \in I$ ist $\chi(n_1) \cdot \chi(n_2) = 1$. Wir erhalten also

$$g_n^\chi = \chi(n) + \sum_{n_1+n_2=n} \chi(n_1) \cdot \chi(n_2) + \sum_{n_1+n_2+n_3=n} \chi(n_1) \cdot \chi(n_2) \cdot \chi(n_3) + \dots$$

Diese Summe ist endlich, da es nur endlich viele Möglichkeiten gibt, n als Summe mit Zahlen aus \mathbb{N}^+ darzustellen. Dies setzen wir nun in die erzeugende Funktion (*) ein und ordnen nach der Anzahl der Summanden um.

$$\begin{aligned}
 g_t^\chi &= \sum_{n=0}^{\infty} g_n^\chi t^n \\
 &= 1 + g_1^\chi t + g_2^\chi t^2 + g_3^\chi t^3 + \dots \\
 &= 1 + \chi(1) \cdot t \\
 &\quad + (\chi(2) + \sum_{n_1+n_2=2} \chi(n_1) \cdot \chi(n_2)) \cdot t^2 \\
 &\quad + (\chi(3) + \sum_{n_1+n_2=3} \chi(n_1) \cdot \chi(n_2) + \sum_{n_1+n_2+n_3=3} \chi(n_1) \cdot \chi(n_2) \cdot \chi(n_3)) \cdot t^3 + \dots \\
 &\text{Umordnung nach Anzahl der Summanden ergibt} \\
 &= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \chi(i) \cdot t^i \\
 &\quad + \sum_{i_1, i_2=1}^{\infty} \chi(i_1) \cdot \chi(i_2) \cdot t^{i_1+i_2} \\
 &\quad + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^{\infty} \chi(i_1) \cdot \chi(i_2) \cdot \chi(i_3) \cdot t^{i_1+i_2+i_3} + \dots \\
 &= 1 + \chi(t) + (\chi(t))^2 + (\chi(t))^3 + \dots \\
 &= (1 - \chi(t))^{-1}
 \end{aligned}$$

ad 2) Wie im Fall 4.1 geordneter Partionen erhalten wir durch Umordnung der Summe

nach der Anzahl der Summanden:

$$\begin{aligned}
 p_t^X &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n^X t^n \\
 &= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \chi(i) \cdot t^i \\
 &\quad + \sum_{i_1, i_2=1}^{\infty} \chi(i_1) \cdot \chi(i_2) \cdot t^{i_1+i_2} \\
 &\quad + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^{\infty} \chi(i_1) \cdot \chi(i_2) \cdot \chi(i_3) \cdot t^{i_1+i_2+i_3} + \dots \\
 &= 1 + \sum_{i \in I} t^i \\
 &\quad + \sum_{0 < i_1 \leq i_2 < \infty, i_1, i_2 \in I} t^{i_1+i_2} \\
 &\quad + \sum_{0 < i_1 \leq i_2 \leq i_3 \leq \infty, i_1, i_2, i_3 \in I} t^{i_1+i_2+i_3} \\
 &\quad + \sum_{0 < i_1 \leq i_2 \leq i_3 \leq i_4 \leq \infty, i_1, i_2, i_3, i_4 \in I} t^{i_1+i_2+i_3+i_4} + \dots \\
 &= 1 + \sum_{i \in I} t^i \\
 &\quad + \sum_{0 < i_1 < i_2 < \infty, i_1, i_2 \in I} t^{i_1+i_2} + \sum_{i \in I} t^{2i} \\
 &\quad + \sum_{0 < i_1 < i_2 < i_3 < \infty, i_1, i_2, i_3 \in I} t^{i_1+i_2+i_3} + \sum_{0 < i_1 < i_2 < \infty, i_1, i_2 \in I} (t^{2i_1+i_2} + t^{i_1+2i_2}) + \sum_{i \in I} t^{3i} \\
 &\quad + \sum_{0 < i_1 < i_2 < i_3 < i_4 < \infty, i_1, i_2, i_3, i_4 \in I} t^{i_1+i_2+i_3+i_4} \\
 &\quad + \sum_{0 < i_1 < i_2 < i_3 < \infty, i_1, i_2, i_3 \in I} \left(\sum_{c_1+c_2+c_3=4} t^{c_1 \cdot i_1 + c_2 \cdot i_2 + c_3 \cdot i_3} \right) \\
 &\quad + \sum_{0 < i_1 < i_2 < \infty, i_1, i_2 \in I} \left(\sum_{c_1+c_2=4} t^{c_1 \cdot i_1 + c_2 \cdot i_2} \right) + \sum_{i \in I} t^{4i} + \dots
 \end{aligned}$$

Dies wird wieder nach der Anzahl der verwendeten Indices aus I geordnet.

$$\begin{aligned}
 p_t^X &= 1 + \sum_{i \in I} (t^i + t^{2i} + t^{3i} + t^{4i} + \dots) \\
 &+ \sum_{0 < i_1 < i_2 < \infty, i_1, i_2 \in I} \left(\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{c_1+c_2=n} t^{c_1 \cdot i_1 + c_2 \cdot i_2} \right) \right) \\
 &+ \sum_{0 < i_1 < i_2 < i_3 < \infty, i_1, i_2, i_3 \in I} \left(\sum_{n=3}^{\infty} \left(\sum_{c_1+c_2+c_3=n} t^{c_1 \cdot i_1 + c_2 \cdot i_2 + c_3 \cdot i_3} \right) \right) + \dots \\
 &= 1 + \sum_{i \in I} (t^i + t^{2i} + t^{3i} + t^{4i} + \dots) \\
 &+ \sum_{0 < i_1 < i_2 < \infty, i_1, i_2 \in I} (t^{i_1} + t^{2i_1} + \dots) \cdot (t^{i_2} + t^{2i_2} + \dots) \\
 &+ \sum_{0 < i_1 < i_2 < i_3 < \infty, i_1, i_2, i_3 \in I} (t^{i_1} + t^{2i_1} + \dots) \cdot (t^{i_2} + t^{2i_2} + \dots) \cdot (t^{i_3} + t^{2i_3} + \dots) + \dots \\
 &= \prod_{i \in I} (1 - t^i)^{-1}
 \end{aligned}$$

ad 3) Wie im Fall 4.1 geordneter Partionen erhalten wir durch Umordnung der Summe nach der Anzahl der Summanden:

$$\begin{aligned}
 q_t^X &= \sum_{n=0}^{\infty} q_n^X t^n \\
 &= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \chi(i) \cdot t^i \\
 &+ \sum_{i_1, i_2=1}^{\infty} \chi(i_1) \cdot \chi(i_2) \cdot t^{i_1+i_2} \\
 &+ \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^{\infty} \chi(i_1) \cdot \chi(i_2) \cdot \chi(i_3) \cdot t^{i_1+i_2+i_3} + \dots \\
 &= 1 + \sum_{i \in I} t^i \\
 &+ \sum_{0 < i_1 < i_2 < \infty, i_1, i_2 \in I} t^{i_1+i_2} \\
 &+ \sum_{0 < i_1 < i_2 < i_3 < \infty, i_1, i_2, i_3 \in I} t^{i_1+i_2+i_3} + \dots \\
 &= \prod_{i \in I} (1 + t^i)
 \end{aligned}$$

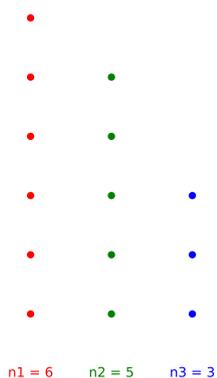
Dabei wurde die Formel für Produkte formaler Potenzreihen aus Satz 2.18 verwendet.

□

4.2. Ferrer-Diagramme

Partitionen können in Ferrer-Diagrammen veranschaulicht werden.

Beispiel 4.5. Die (ungeordnete) Partition $\pi = (6, 5, 3)$ wird durch folgendes Diagramm visualisiert:



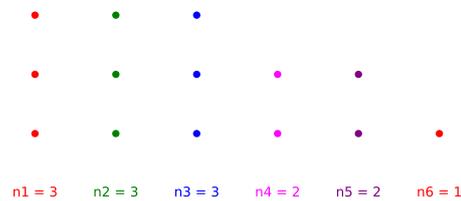
Definition 4.6. Zu einer gegebenen Partition geht die duale Partition durch Spiegelung des Ferrer-Diagramm an der Diagonalen hervor. Die Dualität ist durch die Abbildung

$$\begin{aligned} * : P_n &\longrightarrow P_n \\ \pi &\longmapsto \pi^* \end{aligned}$$

gegeben.

Eine Partition, die mit ihrer dualen Partition übereinstimmt ($\pi = \pi^*$), heisst selbst-dual.

Die Partition $\pi = (6, 5, 3)$ aus Beispiel 4.5 hat die duale Partition $\pi^* = (3, 3, 3, 2, 2, 1)$.



4.3. Spezielle ungeordnete Partitionen

Wir betrachten nun spezielle Arten von ungeordneten Partitionen.

Definition 4.7. Sei P_n die Menge der ungeordneten Partitionen von $n \in \mathbb{N}$ mit Wiederholungen und Q_n die Menge der ungeordneten Partitionen von $n \in \mathbb{N}$ ohne Wiederholungen.

1. Die Anzahl der ungeordneten Partitionen mit Wiederholungen wird mit p_n bezeichnet.
2. Die Anzahl der ungeordneten Partitionen ohne Wiederholungen wird mit q_n bezeichnet.
3. Eine Partition heisst ungerade, wenn nur ungerade Zahlen darin vorkommen.
4. Die Anzahl der ungeraden Partitionen in P_n wird mit p_n^{odd} bezeichnet.
5. Die Anzahl der ungeraden Partitionen in Q_n wird mit q_n^{odd} bezeichnet.
6. Die Anzahl der selbst-dualen Partitionen in P_n wird mit d_n bezeichnet.

In der folgenden Tabelle sind diese Anzahlen für $n \leq 5$ zusammengestellt.

n	P_n	p_n	p_n^{odd}	q_n	q_n^{odd}	d_n
1	(1)	1	1	1	1	1
2	(2) (1, 1)	2	1	1	0	0
3	(3) (2, 1) (1, 1, 1)	3	2	2	1	1
4	(4) (3, 1) (2, 2) (2, 1, 1) (1, 1, 1, 1)	5	2	2	1	1
5	(5) (4, 1) (3, 2) (3, 1, 1) (2, 2, 1) (2, 1, 1, 1) (1, 1, 1, 1, 1)	7	3	3	1	1

Die erkennbaren Übereinstimmungen zwischen der Anzahl p_n^{odd} der ungeordneten, ungeraden Partitionen mit Wiederholung und der Anzahl q_n der ungeordneten Partitionen ohne Wiederholung sowie zwischen der Anzahl q_n^{odd} der ungeordneten, ungeraden Partitionen ohne Wiederholung und der Anzahl d_n der selbst-dualen Partitionen sind nicht zufällig und werden in folgendem Satz bewiesen.

Satz 4.8. 1. Die Anzahl p_n^{odd} der ungeordneten, ungeraden Partitionen mit Wiederholung und die Anzahl q_n der ungeordneten Partitionen ohne Wiederholung stimmen überein.

$$p_n^{odd} = q_n$$

2. Die Anzahl q_n^{odd} der ungeordneten, ungeraden Partitionen ohne Wiederholung und die Anzahl d_n der selbst-dualen Partitionen stimmen überein.

$$q_n^{odd} = d_n$$

Beweis. ad 1) Nach dem Hauptsatz über erzeugende Funktionen von Partitionen ist die erzeugende Funktion einer ungeordneten Partition

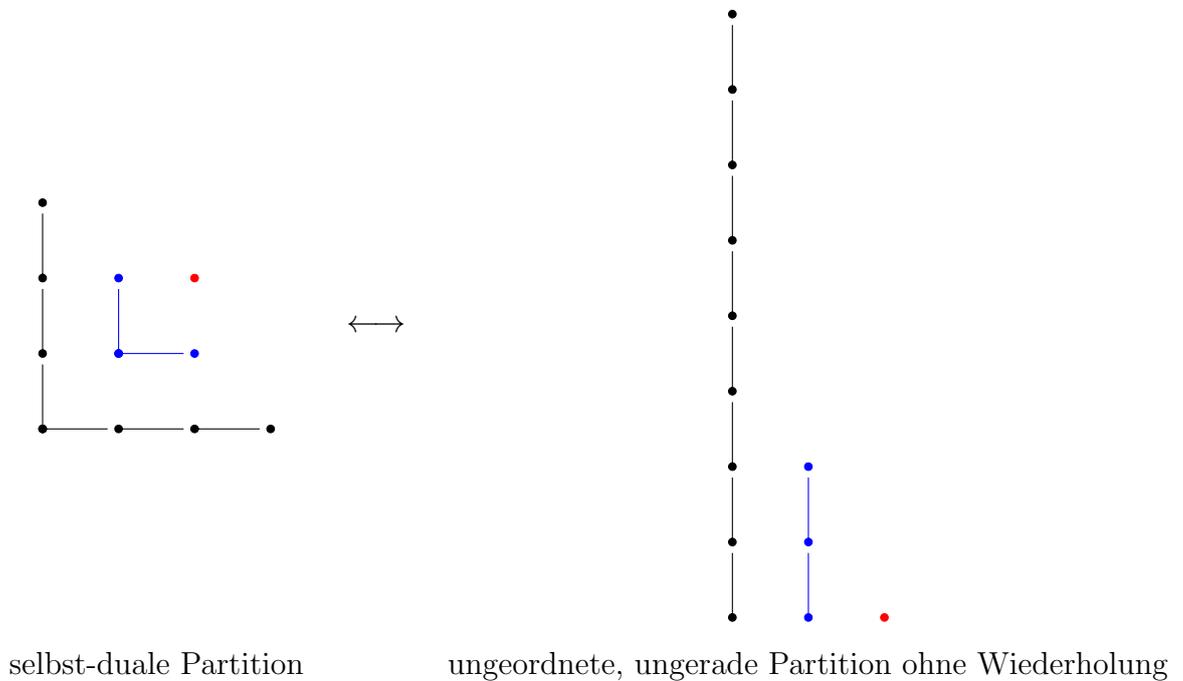
$$p(t) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - t^n)^{-1}$$

Dies kann in ein Produkt aus geraden und ungeraden Partitionen aufgeteilt werden.

$$\begin{aligned} p(t) &= \underbrace{\prod_{n=1}^{\infty} (1 - t^{2n})^{-1}}_{=p(t)^{even}} \cdot \underbrace{\prod_{n=1}^{\infty} (1 - t^{2n-1})^{-1}}_{=p(t)^{odd}} \\ &= \underbrace{\prod_{n=1}^{\infty} (1 - t^n)^{-1}}_{=p(t)} \cdot \underbrace{\prod_{n=1}^{\infty} (1 + t^n)^{-1}}_{=q(t)^{-1}} \cdot \underbrace{\prod_{n=1}^{\infty} (1 - t^{2n-1})^{-1}}_{=p(t)^{odd}} \end{aligned}$$

Da $p(t)$ eine Einheit in $\mathbb{Z}[[t]]$ ist, kann $p(t)$ in dieser Gleichung gekürzt werden und es folgt die Behauptung.

ad 2) Wir betrachten die Ferrer-Diagramme von selbst-dualen Partitionen und stellen eine Bijektion zu ungeordneten, ungeraden Partitionen ohne Wiederholung her. Die folgende Graphik veranschaulicht dies in einem Beispiel.



Da die selbst-dualen Partitionen zur Diagonalen spiegel-symmetrisch sind, hat jede Spalte genau so viele Punkte wie die entsprechende Zeile. Zusammengenommen haben diese immer eine ungerade Anzahl von Punkten und diese Anzahl nimmt mit der Spalten- beziehungsweise Zeilennummer ab. Wir ordnen also in einem Ferrer-Diagramm einer selbst-dualen Partition die Punkte einer Spalte zusammen mit den Punkten der entsprechenden Zeile eine Spalte in einem neuen Ferrer-Diagramm zu. Da diese Spalten stets eine ungerade Anzahl von Punkten enthalten und keine Wiederholungen möglich sind, stellt dieses neue Ferrer-Diagramm eine ungeordnete, ungerade Partition ohne Wiederholung dar. Dieser Prozess ist umkehrbar. Daraus folgt die Behauptung. □

Aus dem Satz ergeben sich folgende Formeln für die erzeugenden Funktionen.

Korollar 4.9. *Für die erzeugenden Funktionen einer ungeordneten Partition ohne Wiederholung und einer ungeordneten, ungeraden Partition mit Wiederholung gilt folgender Zusammenhang:*

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + t^n) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - t^{2n-1})^{-1}$$

Korollar 4.10. *Die erzeugende Funktion für ungeordnete, selbst-duale Partitionen ist:*

$$d(t) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m t^m = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + t^{2n-1})$$

4.4. Eulersches Pentagonalzahl-Theorem

Aus den erzeugenden Funktionen von Partitionen lassen sich eine Vielzahl von Formeln ableiten. Der folgende Satz ist als Pentagonalzahl-Theorem bekannt und geht auf Leonhard Euler (1707 - 1783) zurück. Um die Bezeichnung des Satz zu verstehen, wird der Begriff der Pentagonalzahl beziehungsweise Fünfeckszahl definiert.

Definition 4.11. Die Zahlen der Folge

$$\frac{n \cdot (3 \cdot n - 1)}{2} \quad n \in \mathbb{N}$$

heissen Pentagonal- beziehungsweise Fünfeckszahlen.

Die Zahlen der Folge

$$\frac{n \cdot (3 \cdot n + 1)}{2} \quad n \in \mathbb{N}$$

heissen Fünfeckszahlen zweiter Art oder Kartenhauszahlen.

Bemerkung 4.12. Die Fünfeckszahlen sind als Folge A000326 in OEIS verzeichnet. Die ersten Fünfeckszahlen sind

$$1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117, 145, \dots$$

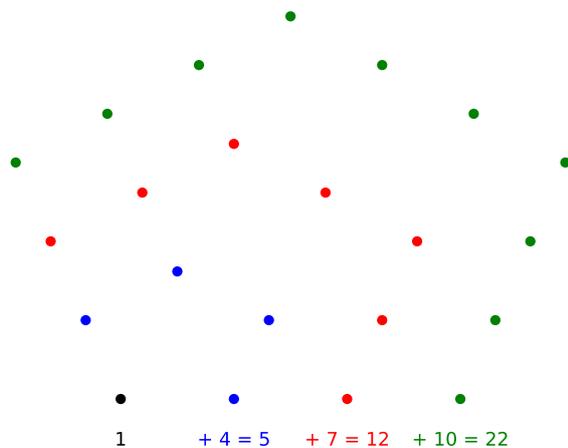
Die Fünfeckszahlen zweiter Art sind als Folge A005449 in OEIS verzeichnet. Die Bezeichnung Kartenhauszahlen rührt daher, dass die Zahlen angeben, wie viele Karten benötigt werden, um ein Kartenhaus mit n Etagen zu bauen. Die Folge der Kartenhauszahlen beginnt mit

$$2, 7, 15, 26, 40, 57, \dots$$

Die Folge der Fünfeckszahlen zweiter Art entsteht aus der Folge der Pentagonalzahlen, wenn $-n$ anstelle von $n \in \mathbb{N}$ verwendet wird. Denn es gilt

$$(-n) \cdot (3 \cdot (-n) - 1) = n \cdot (3 \cdot n + 1)$$

Die Fünfeckszahlen entsprechen der Anzahl von Punkten in regelmäßigen Fünfecken mit einer gemeinsamen Ecke.



Der Beweis des Satzes verwendet Involutionen, die hier zunächst erläutert werden.

Definition 4.13. Sei M eine Menge. Eine Abbildung

$$\varphi : M \longrightarrow M$$

mit der Eigenschaft

$$\varphi^2 = \mathbb{1}_M$$

heisst Involution.

Ein Element $x \in M$ mit $\varphi(x) = x$ heisst Fixpunkt.

Bemerkung 4.14. Eine Involution zerlegt die Menge in Fixpunkte und Paare. Eine Involution auf einer Menge mit ungerader Anzahl von Elementen besitzt mindestens einen Fixpunkt.

Satz 4.15. Eulersches Pentagonalzahl-Theorem

Das unendliche Produkt $\prod_{k=1}^{\infty} (1 - t^k)$ besitzt folgende Reihenentwicklung:

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{\infty} (1 - t^k) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n t^{\frac{n \cdot (3 \cdot n - 1)}{2}} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (t^{\frac{n \cdot (3 \cdot n - 1)}{2}} + t^{\frac{n \cdot (3 \cdot n + 1)}{2}}) \quad \text{oder} \\ (1 - t) \cdot (1 - t^2) \cdot (1 - t^3) \cdot \dots &= 1 - t - t^2 + t^5 + t^7 - t^{12} - t^{15} + t^{22} + t^{26} \pm \dots \end{aligned}$$

Beweis. Sei Q_n die Menge der ungeordneten Partitionen von $n \in \mathbb{N}$ ohne Wiederholungen. Die Anzahl der Summanden einer Partition $\pi \in Q_n$ bezeichnen wir mit der Länge von π . Dann kann die Menge der ungeordneten Partitionen eingeteilt werden in Partitionen mit gerader oder ungerader Länge.

$$Q_n = Q_n^g \cup Q_n^u$$

Die Mächtigkeiten bezeichnen wir mit:

$$\begin{aligned} q_n^g &= |Q_n^g| \quad \text{und} \\ q_n^u &= |Q_n^u| \end{aligned}$$

Wir setzen

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 - t^k) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n t^n \tag{*}$$

Dann muss gezeigt werden:

$$f_n = \begin{cases} (-1)^k & \text{falls } n \text{ eine Pentagonalzahl ist } n = \frac{1}{2}k(3k \pm 1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aus dem Hauptsatz für erzeugende Funktionen von insbesondere ungeordneten Partitionen ohne Wiederholung 4.4 wissen wir:

$$q(t) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + t^k) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \cdot t^n$$

Das heisst, q_n zählt die Möglichkeiten, t^n als Produkt

$$t^n = t^{i_1} \cdot \dots \cdot t^{i_k}$$

darzustellen, wobei $i_1 + \dots + i_k = n$ eine ungeordnete Partition von n ohne Wiederholung ist. Nun betrachten wir folgende Verallgemeinerung mit einer zusätzlichen Variablen s :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{\infty} (1 + s \cdot t^k) &= \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{\infty} s^{\epsilon_i} \cdot t^{i\epsilon_i} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} s^{\sum_i \epsilon_i} \cdot t^{\sum_i i\epsilon_i} \\ &\text{wobei } \begin{cases} \epsilon_i \in \{0, 1\} \\ \epsilon_i = 0 \text{ für fast alle } i \\ \sum_i \epsilon_i = l \text{ Anzahl der Summanden - Länge der Partition} \\ \sum_i i \cdot \epsilon_i = n \end{cases} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^n s^l \cdot q_n^{[l]} \cdot t^n \\ &\text{wobei } q_n^{[l]} \text{ die Anzahl der Partitionen der Länge } l \text{ ist} \end{aligned}$$

Setzen wir $s = -1$, dann erhalten wir mit Gleichung (*):

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{\infty} (1 + (-1) \cdot t^k) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^n (-1)^l \cdot q_n^{[l]} \right) \cdot t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (q_n^g - q_n^u) \cdot t^n \end{aligned}$$

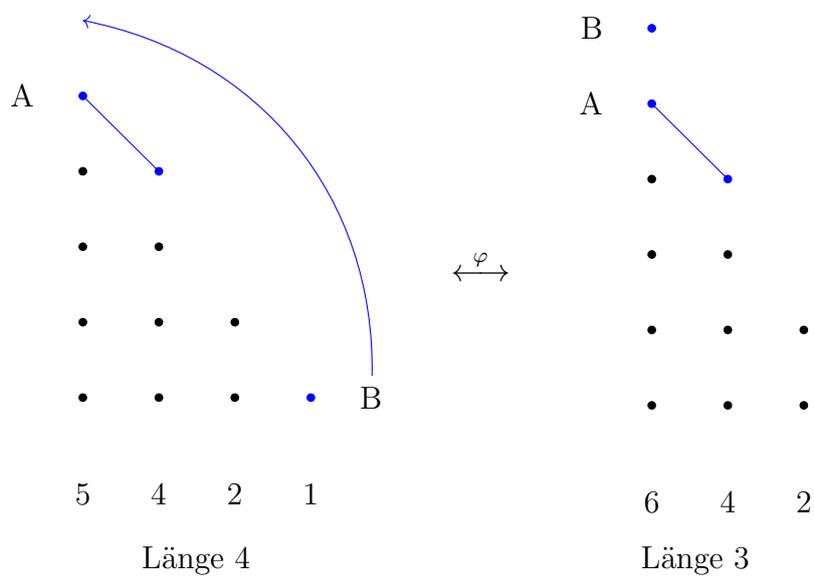
Denn für gerade l ist $(-1)^l = 1$ und $\sum_{l=0}^n q_n^{[l]} = q_n^g$ und für ungerade l ist $(-1)^l = -1$ und $\sum_{l=0}^n q_n^{[l]} = q_n^u$. Durch Koeffizientenvergleich folgt, dass f_n die Differenz der Anzahl der geraden und der Anzahl der ungeraden ungeordneten Partitionen von n

ohne Wiederholung ist.

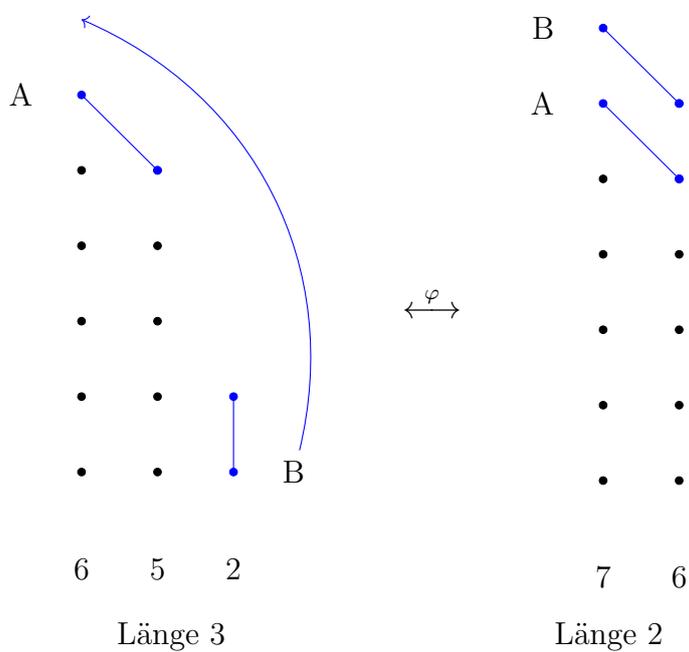
$$f_n = q_n^g - q_n^u$$

Wir konstruieren nun eine Involution φ auf der Menge der Partitionen Q_n . Dies veranschaulichen wir zunächst anhand von Ferrer-Diagrammen in Beispielen:

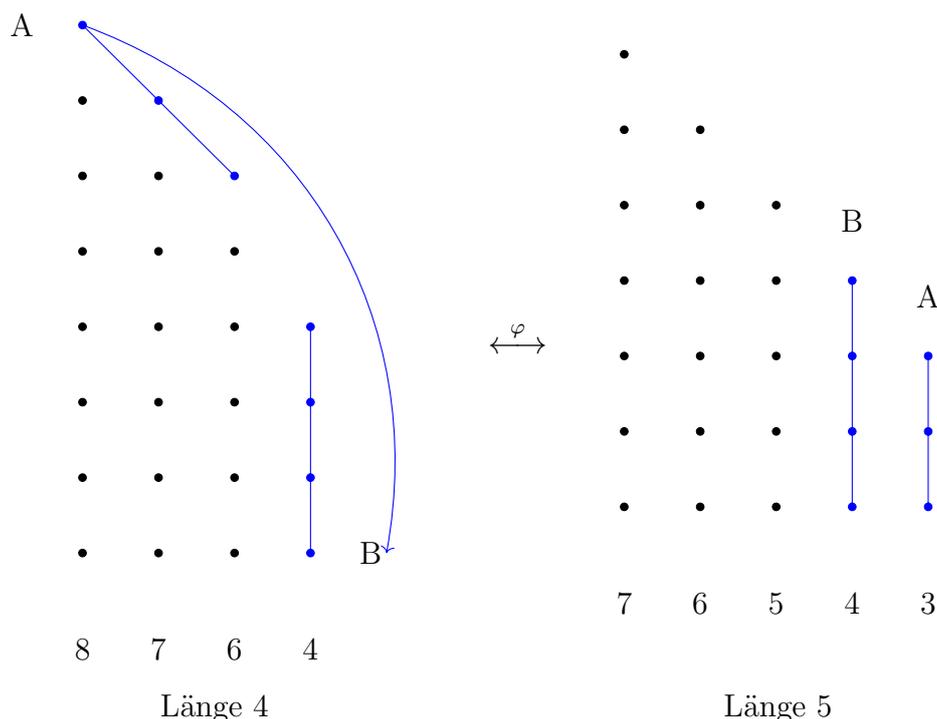
Involution auf Q_{12}



Involution auf Q_{13}



Involution auf Q_{25}



Wir erläutern die Vorgehensweise zunächst anhand der Ferrer-Diagramme. Aus den Punkten im Ferrer-Diagramm werden zwei Mengen gebildet:

- Die Menge A umfasst alle obersten Punkte der ersten Summanden bis die Differenz größer als 1 wird.
- Die Menge B umfasst alle Punkte des letzten Summanden.

Wir betrachten nun eine beliebige Partition

$$\pi = (a_1, a_2, \dots, a_k)$$

und definieren das Bild von π unter der Involution φ unterschiedlich, je nachdem wie das Verhältnis der Mächtigkeiten von A und B ausfällt.

1. $|A| \geq |B| + 1$

Im Ferrer-Diagramm werden die Punkte aus B parallel oberhalb von A angebaut. Das heisst, die ersten $|B| = a_k$ Summanden werden jeweils um 1 erhöht und die letzte Spalte B wird weggelassen.

$$\varphi(\pi) = (a_1 + 1, a_2 + 1, \dots, a_{a_k} + 1, a_{a_k+1}, \dots, a_{k-1})$$

Die Länge der Partition nimmt um 1 ab. Wenn $|A| = |B| + 1 = a_k + 1$ gilt, werden alle Summanden um 1 erhöht. Im neuen Ferrer-Diagramm ist die Menge $A' = B$ mit der Mächtigkeit $|A'| = a_k$ und $|B'| = a_{k-1} > a_k$. Das heisst $|A'| < |B'|$. Das Bild dieser Partition definieren wir weiter unten.

2. $|A| = |B| = k$

Hier müssen zwei Fälle unterschieden werden.

a) $A \cap B = \emptyset$

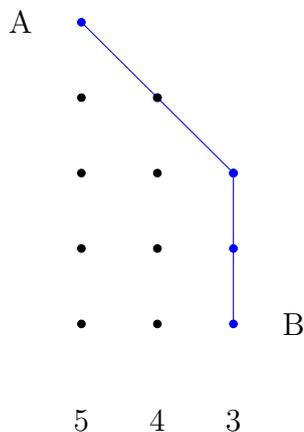
Das heisst, dass es zwischen den ersten $|A|$ Summanden und dem letzten Summanden noch andere Summanden gibt. Dann kann wie oben B oberhalb von A angebaut werden.

$$\varphi(\pi) = (a_1 + 1, a_2 + 1, \dots, a_{a_k} + 1, a_{a_k+1}, \dots, a_{k-1})$$

Die Länge der Partition nimmt um 1 ab. Im neuen Ferrer-Diagramm ist die Menge $A' = B$ mit der Mächtigkeit $|A'| = a_k$ und $|B'| = a_{k-1} > a_k$. Das heisst $|A'| < |B'|$. Das Bild dieser Partition definieren wir weiter unten.

b) $A \cap B \neq \emptyset$

Das heisst, es gibt genausoviele Summanden in der Partition, wie der letzte Summand angibt. Das folgende Ferrer-Diagramm veranschaulicht dies in einem Beispiel.



Diese Situation kann nur vorkommen, wenn

$$\begin{aligned} n &= \underbrace{(2k - 1) + (2k - 2) + \dots + k}_{k \text{ Summanden}} \\ &= \frac{1}{2}k \cdot (3k - 1) \end{aligned}$$

Das heisst, dass n eine Pentagonalzahl erster Art ist. Wir bezeichnen diese spezielle Partition mit

$$\mu = ((2k - 1), (2k - 2), \dots, k)$$

und definieren $\varphi(\mu) = \mu$.

3. $|A| < |B| - 1$

Wir behandeln diesen Fall vorweg. Im Ferrer-Diagramm werden die Punkte aus A als letzte Spalte hinter B angebaut. Das heisst, die ersten $|A|$ Summanden werden jeweils um 1 erniedrigt und $|A|$ wird als letzter Summand angefügt. Die Länge der Partition wird um 1 erhöht.

$$\varphi(\pi) = (a_1 - 1, a_2 - 1, \dots, a_{|A|} - 1, a_{|A|+1}, \dots, a_k, |A|)$$

Im neuen Ferrer-Diagramm hat die Menge A' die Mächtigkeit $|A'| \geq |A|$ und es gilt $B' = A$ mit $|B'| = |A|$. Das heisst $|A'| \geq |B'|$ und wir können das Bild $\varphi(\varphi(\pi))$ nach Fall 1 oder Fall 2a bestimmen und erhalten π zurück. Der Fall 2b kann ausgeschlossen werden, da wegen $|A| < |B| - 1$ die Mächtigkeit von A' kleiner ist als die neue Länge.

4. $k = |A| = |B| - 1$

Hier müssen zwei Fälle unterschieden werden.

a) $A \cap B = \emptyset$

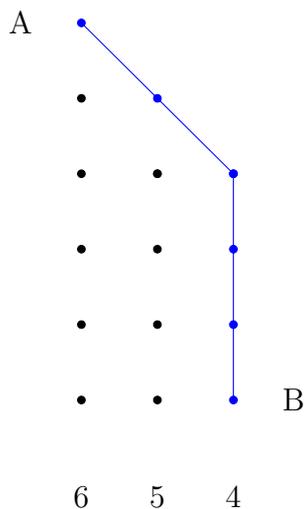
Dann kann wie oben A als letzte Spalte angebaut werden. Die Länge der Partition wird um 1 erhöht.

$$\varphi(\pi) = (a_1 - 1, a_2 - 1, \dots, a_k - 1, a_{k+1}, \dots, a_k = k + 1, k)$$

Im neuen Ferrer-Diagramm hat die Menge A' die Mächtigkeit $|A'| \geq k$ und es gilt $B' = A$ mit $|B'| = k$. Das heisst $|A'| \geq |B'|$ und wir können das Bild $\varphi(\varphi(\pi))$ nach Fall 1 oder Fall 2a bestimmen und erhalten π zurück. Da $A \cap B \neq \emptyset$ vorausgesetzt ist, wird die Spalte B bei dieser Aktion nicht um 1 verringert.

b) $A \cap B \neq \emptyset$

Das heisst, es gibt einen Summanden weniger in der Partition, als der letzte Summand angibt. Das folgende Ferrer-Diagramm veranschaulicht dies in einem Beispiel.



Diese Situation kann nur vorkommen, wenn

$$\begin{aligned} n &= \underbrace{2k + (2k - 1) + \cdots + (k + 1)}_{k \text{ Summanden}} \\ &= \frac{1}{2}k \cdot (3k + 1) \end{aligned}$$

Das heisst, dass n eine Pentagonalzahl zweiter Art ist. Wir bezeichnen diese spezielle Partition mit

$$\nu = (2k, (2k - 1), \dots, (k + 1))$$

und definieren $\varphi(\nu) = \nu$.

Damit ist die Abbildung

$$\varphi : Q_n \longrightarrow Q_n \begin{cases} Q_n^g \setminus \{\mu\} \longrightarrow Q_n^u \setminus \{\mu\} & \text{falls } n = \frac{1}{2}k \cdot (3k - 1) \\ Q_n^g \setminus \{\nu\} \longrightarrow Q_n^u \setminus \{\nu\} & \text{falls } n = \frac{1}{2}k \cdot (3k + 1) \\ Q_n^g \longrightarrow Q_n^u & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Involution, die Partitionen gerader Länge in Partitionen ungerader Länge abbildet und umgekehrt, falls n keine Pentagonalzahl ist. Daraus folgt, dass es in diesem Fall genau so viele Partitionen gerader und ungerader Länge gibt.

$$f_n = q_n^g - q_n^u = 0 \quad \text{für } n \neq \frac{1}{2}k \cdot (3k \pm 1)$$

Für Pentagonalzahlen $n = \frac{1}{2}k \cdot (3k \pm 1)$ ist die Länge der speziellen Partitionen μ aus Fall 2b und ν aus Fall 4b k . Damit erhöht sich die Anzahl q_n^g der Partitionen gerader Länge, wenn k gerade ist, und die Anzahl q_n^u der Partitionen ungerader Länge, wenn k ungerade ist. Daraus folgt

$$f_n = q_n^g - q_n^u = (-1)^k \quad \text{für } n = \frac{1}{2}k \cdot (3k \pm 1)$$

□

4.5. Rekursionsformel für geordnete Partitionen

Aus dem Eulerschen Pentagonalzahl Theorem erhalten wir eine Rekursionsformel für die Anzahl p_n geordneter Partitionen mit Wiederholungen.

Korollar 4.16. *Für die erzeugende Funktion geordneter Partitionen mit Wiederholungen*

$$p(t) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - t^n)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k$$

gilt:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k \right) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1 - t^n) = 1$$

oder

$$(p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3 + p_4 t^4 + p_5 t^5 + \dots) \cdot (1 - t - t^2 + t^5 + t^7 - t^{12} - t^{15} \pm \dots) = 1$$

Ausmultipliziert ergibt sich:

$$\begin{array}{rcccccccc} p_0 & - & p_0 t & - & p_0 t^2 & & & + & p_0 t^5 & & + & p_0 t^7 & \pm \dots + \\ & & p_1 t & - & p_1 t^2 & - & p_1 t^3 & & & + & p_1 t^6 & & \pm \dots + \\ & & & & p_2 t^2 & - & p_2 t^3 & - & p_2 t^4 & + & & + & p_2 t^7 & \pm \dots + \\ & & & & & & p_3 t^3 & - & p_3 t^4 & - & p_3 t^5 & & & \pm \dots + \\ & & & & & & & & p_4 t^4 & - & p_4 t^5 & - & p_4 t^6 & \pm \dots + \\ & & & & & & & & & & p_5 t^5 & - & p_5 t^6 & - & p_5 t^7 & \pm \dots & = & 1 \end{array}$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich daraus:

$$\begin{aligned} p_0 &= 1 \\ p_1 &= p_0 = 1 \\ p_2 &= p_1 + p_0 = 2 \\ p_3 &= p_2 + p_1 = 3 \\ p_4 &= p_3 + p_2 = 5 \\ p_5 &= p_4 + p_3 - p_0 = 7 \end{aligned}$$

Schliesslich ergibt sich die allgemeine Rekursionsformel

$$p_n = p_{n-1} + p_{n-2} - p_{n-5} - p_{n-7} \pm \dots$$

5. Stirling-Zahlen und Bell-Zahlen

5.1. Mengenpartitionen und Äquivalenzrelationen

Wir haben bisher Partitionen betrachtet, die auf Mengen mit Addition definiert sind. Eine Partition war die Darstellung einer Zahl aus dieser Menge als Summe. Dies soll nun auf allgemeine Mengen verallgemeinert werden.

Definition 5.1. Sei A eine Menge und $k \in \mathbb{N}$. Eine Mengenpartition P_k von A in k Blöcken ist eine ungeordnete Familie von nicht-leeren Teilmengen

$$P_k = \{ A_1, \dots, A_k \} \quad \emptyset \neq A_i \subseteq A \quad \text{für } 1 \leq i \leq k$$

mit

$$\begin{aligned} A_i \cap A_j &= \emptyset \quad \text{für } 1 \leq i, j \leq k, \quad i \neq j \quad \text{und} \\ A_1 \cup \dots \cup A_k &= A \end{aligned}$$

Beispiel 5.2. In einem Beispiel betrachten wir die Mengenpartitionen der Menge

$$A = \{1, 2, 3\}$$

und erhalten

$$\begin{array}{lll}
 P_1 = \{\{1, 2, 3\}\} & \text{entspricht } 3 = 3 & \text{triviale Mengenpartition} \\
 \left. \begin{array}{l}
 P_2^{(1)} = \{\{1\}, \{2, 3\}\} \\
 P_2^{(2)} = \{\{2\}, \{1, 3\}\} \\
 P_2^{(3)} = \{\{3\}, \{1, 2\}\}
 \end{array} \right\} & \text{entspricht } 3 = 2 + 1 & \\
 P_3 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\} & \text{entspricht } 3 = 1 + 1 + 1 & \text{diskrete Mengenpartition}
 \end{array}$$

Jeder Mengenpartition von $A = [n]$ kann eine ungeordnete Partition von n zugeordnet werden.

Bemerkung 5.3. Eine Mengenpartition P_k von A in k Blöcke entspricht einer Äquivalenzrelation auf A mit k Äquivalenzklassen.

Denn jeder Mengenpartition P_k kann eine Äquivalenzrelation \sim_{P_k} zugeordnet werden:

$$x \sim_{P_k} y \Leftrightarrow \text{es gibt ein } M \in P_k \text{ so dass } x \in M \text{ und } y \in M$$

Umgekehrt bilden die Äquivalenzklassen jeder Äquivalenzrelation \sim auf einer Menge A eine Mengenpartition. Das folgt direkt aus den Eigenschaften von Äquivalenzrelationen.

Bemerkung 5.4. Eine Mengenpartition von $[n]$ in k Blöcke entspricht der Verteilung von n nummerierten Kugeln auf k nicht geordnete Boxen.

Beispiel $n = 5, k = 3$:

$$\begin{array}{l}
 [n] = \{1, 2, 3, 4, 5\} \\
 P_k = \{\{1, 2\}, \{3, 5\}, \{4\}\}
 \end{array}$$

5.2. Stirling-Zahlen 2. Art

Stirling untersuchte die Anzahl der Mengenpartition bereits 1730. Doch erst 1906 führte der dänische Mathematiker Niels Nielsen den Begriff der Stirling-Zahlen ein. Diese werden im folgenden definiert, auch wenn sich weder der Begriff noch eine einheitliche Bezeichnung dafür bisher durchgesetzt haben.

Definition 5.5. Die Anzahl der Mengenpartitionen einer n -elementigen Menge A in k Blöcke heisst Stirling-Zahl 2. Art S_k^n .

Proposition 5.6. *Spezielle Werte von Stirling-Zahlen 2. Art sind:*

1.

$$S_0^n = \begin{cases} 0 & \text{für } n > 0 \\ 1 & \text{für } n = 0 \end{cases}$$

2.

$$S_k^n = 0 \quad \text{für } k > n$$

3. Triviale Mengenpartition

$$S_1^n = 1$$

4. Diskrete Mengenpartition

$$S_n^n = 1$$

5.

$$S_{n-1}^n = \binom{n}{2}$$

6.

$$S_2^n = 2^{n-1} - 1$$

Beweis. Die Werte 1. bis 4. folgen direkt aus der Definition.

ad 5) Eine Mengenpartition einer n -elementigen Menge in $n - 1$ Blöcke ist nur möglich mit $n - 2$ einelementigen Blöcken und einem 2-elementigen Block. Die Anzahl, 2 Elemente aus n Elementen auszuwählen, ist genau $\binom{n}{2}$.

ad 6) Sei A eine n -elementige Menge und $P_2 = \{X, Y\}$ eine Mengenpartition in 2 Blöcke. Dann gilt:

$$\begin{aligned} X &\neq \emptyset \\ Y &\neq \emptyset \\ X \cup Y &= A \\ X \cap Y &= \emptyset \\ \Rightarrow Y &= A \setminus X \end{aligned}$$

Das heisst, dass Y nach der Wahl von X festliegt. Für die Wahl der Teilmenge $X \subseteq A$ gibt es $2^n - 2$ Möglichkeiten, denn $X = A$ und $X = \emptyset$ sind ausgenommen. Da es auf die Reihenfolge von X und Y nicht ankommt, muss diese Zahl halbiert werden.

□

5.3. Rekursionsformel für Stirling-Zahlen 2. Art

Ähnlich wie für die Binomialkoeffizienten gibt es auch für die Stirling-Zahlen eine Rekursionsformel.

Satz 5.7. Für die Stirling-Zahlen 2. Art gilt folgende Rekursionsformel:

$$S_k^n = S_{k-1}^{n-1} + k \cdot S_k^{n-1} \quad \text{für } n, k \in \mathbb{N}$$

Beweis. Sei $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ eine n -elementige Menge und $\Pi = \{A_1, \dots, A_k\}$ eine Mengenpartition in k Blöcken. Davon gibt es S_k^n Stück. Nun unterscheiden wir 2 Fälle:

1. a_n taucht isoliert auf

Ohne Einschränkung können wir annehmen:

$$A_1 = \{a_n\}$$

Dann ist $\{A_2, \dots, A_k\}$ eine Mengenpartition von $\{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ in $k-1$ Blöcken. Davon gibt es S_{k-1}^{n-1} Stück.

2. a_n taucht nicht isoliert auf

Dann kann a_n in jeder der Teilmengen A_i , $1 \leq i \leq k$ auftreten und

$$\{A_1, \dots, A_i \setminus \{a_n\}, \dots, A_k\}$$

ist eine Mengenpartition von $\{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ in k Blöcken. Davon gibt es $k \cdot S_k^{n-1}$ Stück.

Zusammengenommen ergibt sich

$$S_k^n = S_{k-1}^{n-1} + k \cdot S_k^{n-1}$$

□

5.4. Exponentiell erzeugende Funktionen für Stirling-Zahlen 2.Art

Satz 5.8. Die exponentiell erzeugende Funktion der Stirling Zahlen 2. Art ist:

$$\hat{S}^k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} S_k^n \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!} (e^t - 1)^k \quad (\text{Stirling})$$

Beweis. Da $S_k^n = 0$ für $n < k$ gilt, hat

$$\hat{S}^k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} S_k^n \frac{t^n}{n!}$$

die Ordnung k . Mit der Rekursionsformel 5.7 erhalten wir

$$\hat{S}^k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} S_{k-1}^{n-1} \frac{t^n}{n!} + k \cdot \sum_{n=0}^{\infty} S_k^{n-1} \frac{t^n}{n!}$$

Nach Ableitung dieser Gleichung folgt:

$$\partial \hat{S}^k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} S_{k-1}^{n-1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + k \cdot \sum_{n=0}^{\infty} S_k^{n-1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = \hat{S}^{k-1}(t) + k \cdot \hat{S}^k(t) \quad (*)$$

Dies wird nun genutzt, um die Behauptung durch Induktion zu beweisen.

Induktionsanfang $k = 0$

$$\hat{S}^0(t) = 1$$

Induktionsannahme

$$\hat{S}^{k-1}(t) = \frac{1}{(k-1)!} (e^t - 1)^{k-1}$$

Induktionsschritt

Wir schreiben

$$\hat{S}^k(t) = \frac{1}{k!} (e^t - 1)^k + \delta(t) \quad (**)$$

mit einer Fehlerfunktion $\delta(t)$ und müssen zeigen, dass $\delta(t) = 0$ gilt. Dies wird in die Ableitungsformel * eingesetzt.

$$\begin{aligned} \partial \hat{S}^k(t) &= \underbrace{\hat{S}^{k-1}(t)}_{\text{Induktionsannahme}} + k \cdot \underbrace{\hat{S}^k(t)}_{\text{siehe oben}} \\ \frac{1}{k!} (e^t - 1)^{k-1} \cdot k \cdot e^t + \partial \delta(t) &= \frac{1}{(k-1)!} (e^t - 1)^{k-1} + k \cdot \left(\frac{1}{k!} (e^t - 1)^k + \delta(t) \right) \\ \frac{1}{(k-1)!} (e^t - 1)^k + \frac{1}{(k-1)!} (e^t - 1)^{k-1} + \partial \delta(t) &= \frac{1}{(k-1)!} (e^t - 1)^{k-1} + \frac{1}{(k-1)!} (e^t - 1)^k + k \cdot \delta(t) \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \partial \delta(t) &= k \cdot \delta(t) \\ \delta(t) &= c \cdot e^{kt} \end{aligned}$$

In Gleichung ** hat die linke Seite die Ordnung k und $(e^t - 1)^k$ ebenfalls. Also muss die Ordnung von $\delta(t)$ mindestens k sein. Dies ist nur möglich, wenn $c = 0$ gilt und somit $\delta(t) = 0$. □

5.5. Summenformel für Stirling-Zahlen 2. Art

Satz 5.9. Die Stirling-Zahlen zweiter Art ergeben sich aus folgender Formel:

$$S_k^n = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n$$

Beweis. Aus der Formel (Stirling) aus Satz 5.8 erhalten wir:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} S_k^n \frac{t^n}{n!} &= \frac{1}{k!} (e^t - 1)^k \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} e^{jt} \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \sum_{n=0}^{\infty} j^n \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

Durch Vergleich der Koeffizienten von $\frac{t^n}{n!}$ ergibt sich die Behauptung. □

5.6. Bell-Zahlen

Definition 5.10. Die Anzahl aller Mengenpartitionen einer n -elementigen Menge A heisst Bell-Zahl B_n . Es gilt:

$$B_n = \sum_{k=0}^{\infty} S_k^n$$

Die Folge der Bell-Zahlen B_n ist als Folge A000110 in OEIS verzeichnet. Im Jahre 1978 stellte Martin Gardner die Frage, ob es unter den Bell-Zahlen unendlich viele Primzahlen gibt. Bisher wurden 7 Bell-Zahlen als Primzahlen bestätigt und dies sind auch alle derzeit bekannten bis B_{30447} .

5.7. Exponentiell erzeugende Funktionen für Bell-Zahlen

Satz 5.11. Die exponentiell erzeugende Funktion der Bell-Zahlen ist:

$$\hat{B}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} = e^{e^t - 1} \quad (\text{Bell})$$

Beweis. Wir verwenden die Aussage aus Satz 5.8 und erhalten:

$$\begin{aligned}
 \hat{B}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} S_k^n \frac{t^n}{n!} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \hat{S}^k(t) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (e^t - 1)^k \quad \text{nach Satz 5.8} \\
 &= e^{(e^t - 1)}
 \end{aligned}$$

□

5.8. Rekursionsformel für Bell-Zahlen

Satz 5.12. Für Bell-Zahlen gilt folgende Rekursionsformel:

$$B_{n+1} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} B_j$$

Beweis. Wir leiten die exponentiell erzeugende Funktion der Bell-Zahlen aus Satz 5.11 ab.

$$\begin{aligned}
 \hat{B}(t) &= e^{e^t - 1} \\
 \Rightarrow \partial \hat{B}(t) &= \hat{B}(t) \cdot e^t \\
 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} B_{n+1} \frac{t^n}{n!} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!} \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^n}{n!} \\
 \text{mit } c_n &= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} B_j
 \end{aligned}$$

□

5.9. Dopinskis Formel für Bell-Zahlen

Satz 5.13. Dopinskis Formel

Für Bell-Zahlen gilt folgende analytische Formel:

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$$

Beweis. Aus der Summendarstellung der exponentiell erzeugenden Funktion $\hat{B}(t)$ für Bell-Zahlen ergibt sich die n -te Bell-Zahl B_n aus der n -ten Ableitung an der Stelle $t = 0$.

$$\begin{aligned} B_n &= \partial^n \left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!} \right) \Big|_{t=0} \\ &= \partial^n (e^{e^t-1}) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{1}{e} \partial^n (e^{e^t}) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{1}{e} \partial^n \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{kt}}{k!} \right) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n \cdot e^{kt}}{k!} \Big|_{t=0} \\ &= \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} \end{aligned}$$

□

Bemerkung 5.14. Die Rekursionsformel für Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

führt auf das Pascalsche Dreieck. Ebenso ergibt sich aus der Rekursionsformel für

Stirling-Zahlen eine dreieckige Anordnung. Beide sind hier gegenübergestellt.

	Binomialkoeffizienten							Stirling – Zahlen						Bell – Zahlen	
n	$\binom{n}{k}$						$\sum \binom{n}{k}$	S_k^n						$B_n = \sum S_k^n$	
0	1						1	1							1
1	1	1					2	0	1						1
2	1	2	1				4	0	1	1					2
3	1	3	3	1			8	0	1	3	1				5
4	1	4	6	4	1		16	0	1	7	6	1			15
5	1	5	10	10	5	1	32	0	1	15	25	10	1		52
n	1	...	$\binom{n}{2}$	2^n	$2^{n-1} - 1$

5.10. Anzahl aller surjektiven Abbildungen endlicher Mengen

Satz 5.15. Sei A eine n -elementige Menge und B eine k -elementige Menge. Die Anzahl aller surjektiven Abbildungen von A nach B ist gegeben durch

$$k! \cdot S_k^n$$

Insbesondere gibt es keine surjektiven Abbildungen für $k > n$.

Beweis. Eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ induziert eine Äquivalenzrelation auf dem Definitionsbereich A von f durch:

$$x \sim x' \iff f(x) = f(x')$$

Nach Bemerkung 5.3 entspricht jeder Äquivalenzrelation auf A mit m Äquivalenzklassen eine Mengenpartition von A in m Blöcken. Da die Abbildung f als surjektiv vorausgesetzt ist, gibt es genau so viele Äquivalenzklassen wie Elemente in B , also k Stück. Die Anzahl der Äquivalenzrelationen auf A in k Blöcken ist wiederum gegeben durch die Stirling-Zahl S_k^n . Aus einer Äquivalenzrelation erhalten wir für jede Permutation der k Elemente von B eine surjektive Funktion. Das ergibt insgesamt $k! \cdot S_k^n$ surjektive Funktion von A nach B . □

5.11. Absteigende Potenzen

Definition 5.16. Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Dann heißt

$$x^{k\downarrow} = x \cdot (x-1) \cdots (x-k+1)$$

absteigende Potenz. Anstelle von $x^{k\downarrow}$ wird auch die Bezeichnung $(x)_k$ verwendet.

Satz 5.17. Sei $x \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$x^n = \sum_{k=0}^n S_k^n \cdot x^{k\downarrow}$$

Beweis. Für $x \in \mathbb{N}$ bezeichnet x^n die Anzahl aller Funktionen

$$f : [n] \longrightarrow [x]$$

Für das Bild $Im(f)$ gilt

$$\begin{aligned} Im(f) &\subseteq [x] \\ |Im(f)| &\leq n \end{aligned}$$

Für $|Im(f)| = k$ gibt es nach Satz 5.15 genau $k! \cdot S_k^n$ Funktionen und es gibt $\binom{x}{k}$ Möglichkeiten, k Elemente für das Bild $Im(f)$ aus $[x]$ auszuwählen. Somit setzt sich die gesamte Anzahl von Funktionen $f : [n] \longrightarrow [x]$ wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned} x^n &= \sum_{k=0}^n \binom{x}{k} \cdot k! \cdot S_k^n \\ &= \sum_{k=0}^n S_k^n \cdot x^{k\downarrow} \end{aligned}$$

Da zwei Polynome in $\mathbb{Z}[x]$ übereinstimmen, wenn sie für alle $x \in \mathbb{N}$ übereinstimmen, überträgt sich die Gleichheit für $x \in \mathbb{N}$ auf alle $x \in \mathbb{Z}$. \square

5.12. Basiswechsel zwischen Potenzen und absteigenden Potenzen

Bemerkung 5.18. Sowohl $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ als auch $\{x^{n\downarrow}\}_{n \in \mathbb{N}}$ bilden eine Basis in $\mathbb{Z}[x]$. Nach Satz 5.17 bilden die Stirling-Zahlen 2. Art die Transformationsmatrix S von der kanon-

ischen Basis $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in die Basis mit den absteigenden Potenzen $\{x^{n\downarrow}\}_{n \in \mathbb{N}}$.

$$S = (S_k^n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 7 & 6 & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Die Transformationsmatrix in die umgekehrte Richtung wird von den Stirling-Zahlen erster Art s_k^n gebildet.

$$S^{-1} = (s_k^n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & -6 & 11 & -6 & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

5.13. Stirling-Zahlen 1. Art und Permutationen

Bemerkung 5.19. Stirling-Zahlen erster Art können auch als Anzahl der Permutationen einer n -elementigen Menge, die genau k Zyklen haben, definiert werden.

Ähnlich wie für Stirling-Zahlen zweiter Art gibt es eine explizite Formel

$$\begin{aligned} s_k^n &= \sum_{0 < i_1 < \cdots < i_{n-k} < n} i_1 \cdot i_2 \cdots i_{n-k} \\ &= (n-1)! \sum_{0 < j_1 < \cdots < j_{k-1} < n} (j_1 \cdot j_2 \cdots j_{k-1})^{-1} \end{aligned}$$

und eine rekursive Formel

$$\begin{aligned} s_k^{n+1} &= s_{k-1}^n + n \cdot s_k^n \\ \text{mit } s_n^n &= 1 \\ \text{und } s_k^n &= 0 \quad \text{für } k = 0 < n \text{ oder } n < k \end{aligned}$$

5.14. Der 12-fache Weg

Definition 5.20. Seien $[n]$ und $[m]$ für $n, m \in \mathbb{N}$ die Mengen der ersten n beziehungsweise m Zahlen. Die Menge aller Abbildungen von $[n]$ nach $[m]$ wird mit

$$\mathcal{F}_m^n = \text{map}([n], [m])$$

bezeichnet. Weiter bezeichnen

$$\begin{aligned} \mathcal{IF}_m^n &= \{ f \in \mathcal{F}_m^n \mid f \text{ injektiv} \} \\ \mathcal{SF}_m^n &= \{ f \in \mathcal{F}_m^n \mid f \text{ surjektiv} \} \end{aligned}$$

Einer Abbildung von $[n]$ nach $[m]$ entspricht die Verteilung von n Kugeln auf m Boxen.

In der folgenden Tabelle sind die Anzahlen der möglichen Abbildungen aufgeführt, wobei Abbildungen, die sich nur durch eine Permutation (Umnummerierung) im Definitionsbereich oder Zielbereich unterscheiden, gesondert aufgeführt sind. Das ergibt insgesamt $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ Möglichkeiten.

Umnummerierung	\mathcal{F}_m^n	\mathcal{IF}_m^n ($n \leq m$)	\mathcal{SF}_m^n ($n \geq m$)
$[n]$ <i>nein</i> $[m]$ <i>nein</i>	m^n Tupel	$m^{n\downarrow}$	$m! \cdot S_m^n$
$[n]$ <i>ja</i> $[m]$ <i>nein</i>	$\binom{m+n-1}{n}$ n Multimengen auf $[m]$	$\binom{m}{n}$ Teilmengen	$\binom{n-1}{m-1} = \binom{n-1}{n-m}$ $n-m$ Multimengen auf $[m]$
$[n]$ <i>nein</i> $[m]$ <i>ja</i>	$S_0^n + S_1^n + \dots + S_m^n$	1 Einbettung	S_m^n
$[n]$ <i>ja</i> $[m]$ <i>ja</i>	$p_n^{[0]} + p_n^{[1]} + \dots + p_n^{[m]}$	1	$p_n^{[m]}$

Dabei ist $p_n^{[m]}$ die Anzahl der ungeordneten Partitionen von n mit Länge m und

$$m^{n\downarrow} = m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)$$

6. Catalan-Zahlen

Neben Binomialkoeffizienten, Fibonacci-Zahlen, Stirling- und Bell-Zahlen treten in vielen kombinatorischen Fragestellungen eine weitere Art von Zahlen auf: die Catalan-Zahlen.

Für die Definition wählen wir hier den Weg über die Klammerung von Produkten. Eine Klammerung ist auch für andere, nicht notwendig assoziative Verknüpfungen möglich.

Definition 6.1. Sei $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$ ein Produkt von n Variablen. Eine Klammerung fasst je zwei Variable oder eine Variable und einen bereits geklammerten Ausdruck oder zwei bereits geklammerte Ausdrücke zusammen. Dann ist f_n die Anzahl der möglichen Klammerungen und $c_n = f_{n+1}$ die Catalan-Zahl.

Die Catalan-Zahlen sind als Folge A000108 in OEIS verzeichnet.

Bemerkung 6.2. Für n Variablen ist $n - 1$ die Anzahl der Verknüpfungen und $n - 2$ ist die Anzahl der Klammerpaare.

Beispiel 6.3.

n	Beispiel	$f_n = c_{n-1}$
1	x_1	1
2	$x_1 \cdot x_2$	1
3	$(x_1 \cdot x_2) \cdot x_3$ $x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)$	2
4	$((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3) \cdot x_4$ $(x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)) \cdot x_4$ $(x_1 \cdot x_2) \cdot (x_3 \cdot x_4)$ $x_1 \cdot ((x_2 \cdot x_3) \cdot x_4)$ $x_1 \cdot (x_2 \cdot (x_3 \cdot x_4))$	5
5		14
6		42
7		132

6.1. Rekursionsformel für Catalan-Zahlen

Satz 6.4. Rekursionsformel für f_n

Für $n \geq 2$ gilt die Rekursionsformel:

$$\begin{aligned} f_n &= \sum_{k=1}^{n-1} f_k \cdot f_{n-k} \\ &= f_1 \cdot f_{n-1} + f_2 \cdot f_{n-2} + \cdots + f_{n-1} \cdot f_1 \end{aligned}$$

Beweis. Jede Klammerung der n Variablen ist ein Produkt $a \cdot b$, wobei a eine Klammerung von k Variablen und b eine Klammerung von $n - k$ Variablen ist. \square

Daraus folgt unmittelbar die bereits 1758 von Segner gefundene Rekursionsformel für Catalan-Zahlen.

Korollar 6.5. *Für Catalan-Zahlen gilt die Rekursionsformel:*

$$c_{n+1} = \sum_{k=0}^n c_k \cdot c_{n-k}$$

6.2. Explizite Formel für Catalan-Zahlen

Satz 6.6. Formeln für f_n und c_n

Für die Anzahl f_n der Klammerungen von n Variablen gilt folgende explizite Formel:

$$f_n = \frac{1}{n} \cdot \binom{2n-2}{n-1}$$

Für die Catalan-Zahlen c_n gilt folgende explizite Formel:

$$c_n = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n} \quad (\text{Cat})$$

Beweis. Die Formel für Catalan-Zahlen ergibt sich aus der ersten Formel für f_n . Wir betrachten die erzeugende Funktion der Folge f_n

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot t^n$$

Daraus erhalten wir mit der Rekursionsformel aus Satz 6.4

$$\begin{aligned} f(t) &= t + \sum_{n=2}^{\infty} f_n \cdot t^n \\ &= t + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} f_k \cdot f_{n-k} \right) t^n \\ &= t + \left(\sum_{m=1}^{\infty} f_m \cdot t^m \right)^2 \end{aligned}$$

Das heisst, die erzeugende Funktion genügt einer quadratischen Funktionalgleichung

$$f(t)^2 - f(t) + t = 0$$

mit der Lösung

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - t} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (1 - \sqrt{1 - 4t}) \quad \text{da konstanter Term} = 0 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} (-4t)^k \right) \quad \text{verallgemeinerte binomische Reihe} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} (-1)^k \cdot 2^{2k} \cdot t^k \end{aligned}$$

Dabei ist $\binom{\frac{1}{2}}{k}$ der verallgemeinerte Binomialkoeffizient und es gilt:

$$\begin{aligned}
 \binom{\frac{1}{2}}{k} &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdots \overbrace{\left(\frac{1}{2} - k + 1\right)}{= -\frac{2k-3}{2}}}{k!} \\
 &= \frac{(-1)^{k-1} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-3)}{2^k k!} \\
 &\quad \text{Erweiterung mit geraden Zahlen } (2k-2) \cdot (2k-4) \cdots 2 \\
 &= \frac{(-1)^{k-1} (2k-2)!}{2^k k! \cdot (2k-2) \cdot (2k-4) \cdots 2} \\
 &= \frac{(-1)^{k-1} (2k-2)!}{2^k k! \cdot 2^{k-1} \cdot (k-1)!} \\
 &= \frac{(-1)^{k-1} (2k-2)!}{2^{2k-1} k! \cdot (k-1)!} \\
 &= \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}} \frac{1}{k} \binom{2k-2}{k-1}
 \end{aligned}$$

Oben eingesetzt ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} (-1)^k \cdot 2^{2k} \cdot t^k \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}} \frac{1}{k} \binom{2k-2}{k-1} (-1)^k \cdot 2^{2k} \cdot t^k \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \binom{2k-2}{k-1} \cdot t^k
 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Behauptung durch Koeffizientenvergleich. □

Beispiel 6.7. Als Beispiel berechnen wir die fünfte Catalan-Zahl.

$$\begin{aligned}
 c_5 &= \frac{1}{6} \binom{10}{5} \\
 &= \frac{1}{6} \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \\
 &= 42
 \end{aligned}$$

6.3. Andere Deutungen der Catalan-Zahlen

Die Catalan-Zahlen wurden oben über die Zählung von Klammerungen eingeführt. Im folgenden sollen andere Deutungen der Catalan-Zahlen erläutert werden.

6.3.1. Ebene, binäre Bäume mit Wurzel

Definition 6.8. Ein Baum der Höhe 1 besteht aus einem Knoten, der Wurzel.

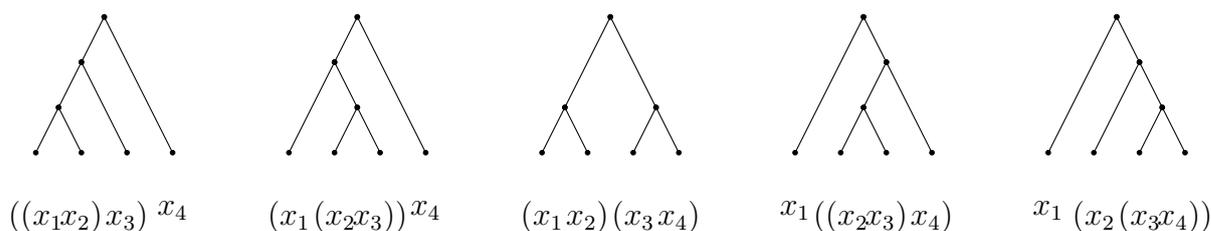
Ein Baum der Höhe 2 besteht aus einer Wurzel und einer endlichen Anzahl k_2 von nachfolgenden Knoten, die durch Kanten mit der Wurzel verbunden sind.

Ein Baum der Höhe n besteht aus einer Wurzel und einer endlichen Anzahl k_n von nachfolgenden Teilbäumen der Höhe $n - 1$, die durch Kanten mit der Wurzel verbunden sind.

Ein Knoten, der keine Nachfolger hat, heisst Blatt.

Ein Baum, in dem alle Knoten höchstens 2 Nachfolger haben, heisst binär.

Beispiel 6.9. In diesem Beispiel veranschaulichen wir die Definition und stellen gleichzeitig einen Zusammenhang zur Klammerung her. Die Wurzel ist in den Darstellungen meist oben.



Satz 6.10. Die Anzahl der ebenen, binären Bäume mit Wurzel und n Blättern ist die Catalan-Zahl c_{n-1} .

Beweis. Wir bezeichnen die Blätter des Baumes mit x_1, \dots, x_n . Jedem Klammerpaar wir der jeweils Vorgängerknoten zugeordnet. Diese Zuordnung ist ein-eindeutig. \square

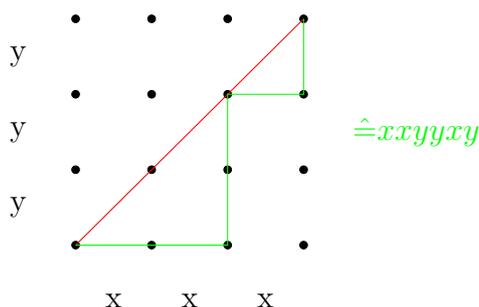
6.3.2. Dyck Worte

Definition 6.11. Ein Dyck Wort der Länge n besteht aus n Buchstaben x und n Buchstaben y mit der Eigenschaft, dass in allen Anfangsabschnitten des Wortes mindestens so viele Buchstaben x wie y vorkommen.

Beispiel 6.12. Als Beispiel betrachten wir die 5 Dyck Worte der Länge 3.

$xxxyyy$
 $xyyyxy$
 $xyxyxy$
 $yxxyxy$
 $xyxyxy$

Bevor wir die Anzahl der Dyck Worte untersuchen, geben wir noch eine äquivalente Deutung für Dyck Worte. Dazu betrachten wir ein Gitter $\{0, 1, \dots, n\} \times \{0, 1, \dots, n\}$ in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.



Ein beliebiges Wort im Alphabet $\{x, y\}$ entspricht einem gerichteten Pfad in diesem Gitter. Das heißt, von einem Gitterpunkt ist es nur erlaubt, nach rechts oder nach oben zu gehen. In jedem Gitterpunkt gibt es zwei Möglichkeiten, den Pfad zum nächsten Gitterpunkt fortzusetzen. Dyck Worte entsprechen den gerichteten Pfaden von $(0, 0)$ nach (n, n) unterhalb der Diagonalen.

Satz 6.13. Die Anzahl der Dyck Worte der Länge n ist die Catalan-Zahl c_n .

Beweis. Sei A_n die Menge aller gerichteten Pfade von $(0, 0)$ nach (n, n) im Gitter. Die Pfade, die Dyck Worten entsprechen und unterhalb der Diagonalen verlaufen, bezeichnen wir mit D_n , das Komplement mit $\overline{D_n} = A_n \setminus D_n$. Jeder gerichtete Pfad von $(0, 0)$ nach (n, n) besteht aus $2n$ Schritten. Denn um bei (n, n) anzukommen, muss man n mal nach rechts und n mal nach oben gehen. Ein Pfad ist festgelegt, wenn aus den $2n$ Schritten die n Schritte nach rechts ausgewählt sind. Das heißt, es gibt $\binom{2n}{n}$ Pfade in A_n .

Nun betrachten wir die Menge B_n aller gerichteten Pfade von $(0, 0)$ nach $(n-1, n+1)$ im Gitter. Jeder dieser Pfade besteht aus $2n$ Schritten. Denn um bei $(n-1, n+1)$ anzukommen, muss man $n-1$ mal nach rechts und $n+1$ mal nach oben gehen. Ein Pfad ist festgelegt, wenn aus den $2n$ Schritten die $n-1$ Schritte nach rechts ausgewählt sind. Das heißt, es gibt $\binom{2n}{n-1}$ Pfade in B_n .

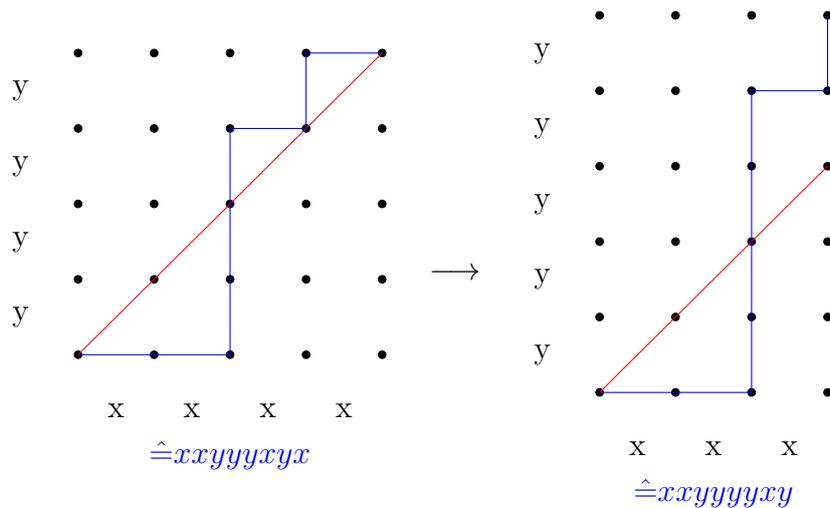
Nun konstruieren wir eine bijektive Abbildung zwischen B_n und \overline{D}_n wie folgt:

$$\overline{D}_n \longrightarrow B_n$$

$$\underbrace{a_1 \cdots a_{2k}}_{k \text{ mal } x, k \text{ mal } y} \quad y \quad \underbrace{b_1 \cdots b_{2n-2k-1}}_{n-k \text{ mal } x, n-k-1 \text{ mal } y} \longmapsto a_1 \cdots a_{2k} y \overline{b_1} \cdots \overline{b_{2n-2k-1}}$$

wobei $\overline{b_i} = \begin{cases} y & \text{wenn } b_i = x \\ x & \text{wenn } b_i = y \end{cases}$

Wir illustrieren dies in folgendem Beispiel für $n = 4$:



Somit hat \overline{D}_n genau so viele Elemente wie B_n und man rechnet

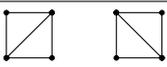
$$\begin{aligned} |D_n| &= |A_n| - |B_n| \\ &= \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} \\ &= \binom{2n}{n} \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \end{aligned}$$

□

6.3.3. Triangulierungen von Polygonen

Die Anzahl aller möglichen Triangulierungen eines konvexen Polygons mit $n + 2$ Ecken hat Leonhard Euler bereits 1751 ermittelt und in einem Brief an Christian Goldbach beschrieben. Bevor wir den Satz formulieren sehen wir uns einige Beispiele an.

Beispiel 6.14.

$n + 2$	Triangulierungen	Anzahl
3		1
4		2
5		5

Aus den Beispielen bekommt man eine intuitive Vorstellung von Triangulierungen. Dennoch benötigt eine formale Definition von Triangulierungen einige Voraussetzungen. Es sei noch erwähnt, dass die Voraussetzung der Konvexität für Triangulierungen abgeschwächt werden kann. Eine Aussage über die Anzahl möglicher Triangulierungen ist dann aber nicht mehr möglich.

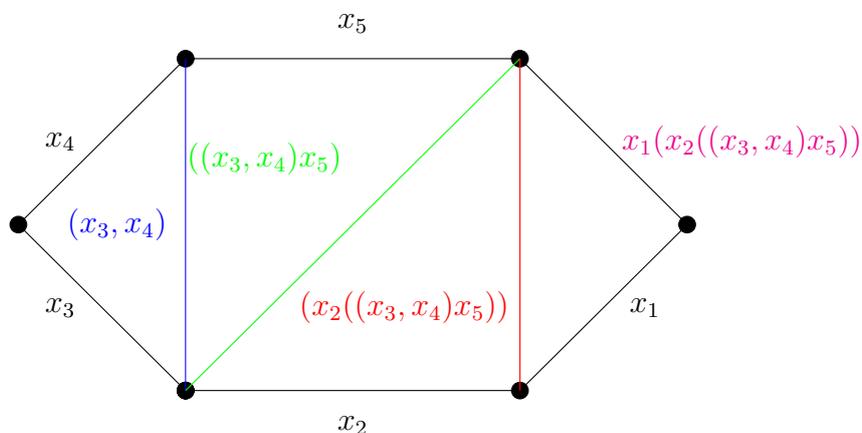
Definition 6.15. Sei P ein ebenes, konvexes Polygon. Eine Diagonale ist die Verbindungsstrecke von zwei Eckpunkten, die ganz innerhalb von P verläuft. Eine Triangulierung von P ist eine Zerlegung von P in Dreiecke durch eine maximale Anzahl schnittfreier Diagonalen.

Bemerkung 6.16. Bei konvexen Polygonen liegt jede Diagonale im Innern von P . Bei konvexen Polygonen gibt es immer eine Triangulierung: Ausgehend von einer Ecke werden alle anderen Ecken mit Diagonalen verbunden. Dadurch entstehen $n - 2$ Dreiecke, wenn das Polygon n Ecken hat.

Satz 6.17. Die Anzahl der möglichen Triangulierungen eines konvexen Polygons mit $n + 2$ Ecken ist die Catalan-Zahl c_n .

Beweis. Zum Beweis werden $n + 1$ Seiten des Polygons mit x_1, x_2, \dots, x_{n+1} nummeriert. Es muss mindestens ein Paar (x_i, x_{i+1}) aufeinanderfolgender Seiten geben, die durch eine Triangulierungs-Diagonale verbunden sind. Nun werden diese zwei Seiten durch diese Diagonale ersetzt, die mit (x_i, x_{i+1}) bezeichnet wird, und man erhält ein Polygon mit $n + 1$ Ecken. Dies wiederholt man bis nur noch ein Dreieck übrig bleibt. Die letzte

Seite des ursprünglichen Polygons wird der sich ergebenden Klammerung zugeordnet. Dadurch erhält man eine bijektive Zuordnung zwischen der Triangulierung und einer Klammerung von $n + 1$ Variablen. Wir illustrieren die Vorgehensweise an folgendem Beispiel:



Damit ergibt sich die Behauptung nach Definition 6.1. □

Stanley hat in einem Artikel [Sta08] weitere 200 Deutungen für und mit Catalan-Zahlen aufgeführt.

6.3.4. Ebene, triadische Bäume mit Wurzel

Im vorigen Abschnitt 6.3.1 haben wir gesehen, dass Catalan-Zahlen ebenen, binären Bäumen mit Wurzel entsprechen. Die erzeugende Funktion $f(t)$ genügt in diesem Fall der Funktionalgleichung

$$f(t) - t = f(t)^2$$

Die erzeugende Funktion ebener, triadischer Bäume genügt der Funktionalgleichung

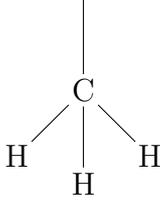
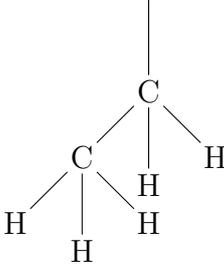
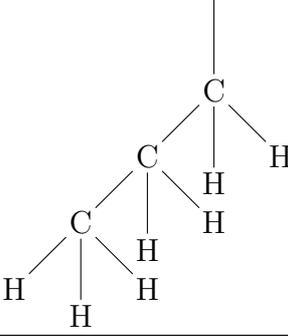
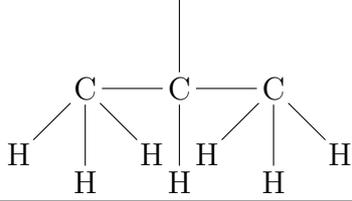
$$f(t) - t = f(t)^3$$

Triadische Bäume entsprechen in der Chemie gesättigten Kohlenwasserstoffen, bei denen ein Kohlenstoffatom etwa durch eine Alkoholgruppe als Wurzel ausgezeichnet ist.

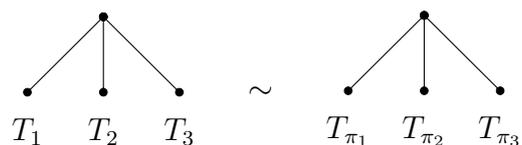
6.3.5. Markierte Kohlenwasserstoffe

Gesättigte Kohlenwasserstoffe haben n Kohlenstoffatome und $2n + 2$ Wasserstoffatome. Dabei sind Verzweigungen erlaubt jedoch keine Zykeln.

In der folgenden Tabelle sind einige Beispiele für einfach gesättigte Alkohole aufgeführt.

CH_3OH	Methanol	
C_2H_5OH	Äthanol	
C_3H_7OH	Propylalkohol	
C_3H_7OH	Isopropylalkohol	

Das Beispiel des Propylalkohols zeigt, dass es verschiedene Typen für Alkohole mit mehreren Kohlenstoffatomen geben kann und die Frage nach der Anzahl ergibt sich. Bei der Zählung muss jedoch beachtet werden, dass Permutationen π der Nachfolgeknoten in der räumlichen Anordnung erlaubt sind und nicht zu einem neuen Typ führen.



Um diese Zählweise unter Beachtung von Symmetrien zu untersuchen, benötigen wir den Begriff der Gruppenoperation und weiterführende Werkzeuge wie den Zykeldikator.

7. Der Abzählssatz von Polya

7.1. Gruppenoperation

Definition 7.1. Sei G eine Gruppe und X eine Menge. Die Gruppe G wirkt auf die Menge X oder G operiert auf X , wenn es eine Abbildung

$$\begin{aligned}\mu : G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g \circ x\end{aligned}$$

gibt mit den Eigenschaften

- $$e \circ x = x \quad \text{für alle } x \in X \quad (\text{W1})$$

- $$(g \cdot h) \circ x = g \circ (h \circ x) \quad \text{für alle } g, h \in G \text{ für alle } x \in X \quad (\text{W2})$$

Beispiel 7.2. 1. Jede Gruppe G wirkt auf sich selbst durch die Verknüpfung.

$$g \circ h = g \cdot h \quad \text{für alle } g, h \in G$$

2. Jede Gruppe G wirkt auf sich selbst durch Konjugation.

$$g \circ x = g \cdot x \cdot g^{-1} = x^g \quad \text{für alle } g, x \in G$$

Hierbei muss sorgfältig zwischen Wirkung und Gruppen-Verknüpfung unterschieden werden.

3. Sei $H < G$ eine Untergruppe in G und $X = G/H$ die Menge der Linksnebenklassen. Dann wirkt G auf X durch

$$g \circ aH = (g \cdot a)H \quad \text{für alle } g, a \in G$$

Lemma 7.3. *Die Gruppe G wirkt auf die Menge X genau dann, wenn es einen Homomorphismus von G in die symmetrische Gruppe $S(X)$ gibt.*

$$\varphi : G \longrightarrow S(X) = \{ f : X \rightarrow X \text{ bijektiv} \}$$

Beweis. Die Gruppe G wirke auf die Menge X . Dann konstruieren wir folgende Abbildung:

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow S(X) \\ g &\longmapsto \varphi_g \\ \varphi_g : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto g \circ x \end{aligned}$$

φ_g ist surjektiv. Denn für jedes $y \in X$ gilt $\varphi_g(g^{-1} \circ y) = y$ und damit ist $g^{-1} \circ y$ das Urbild von y unter der Abbildung φ_g .

φ_g ist injektiv. Denn sei $\varphi_g(x) = \varphi_g(y)$. Dann betrachten wir

$$\begin{aligned} x &= (g^{-1} \cdot g) \circ x \\ &= g^{-1} \circ (\varphi_g(x)) \\ &= g^{-1} \circ (\varphi_g(y)) \\ &= (g^{-1} \cdot g) \circ y \\ &= y \end{aligned}$$

Also ist φ_g bijektiv und damit $\varphi_g \in S(X)$.

Nun zeigen wir noch, dass φ ein Homomorphismus ist. Für $g, h \in G$ und $x \in X$ gilt:

$$\begin{aligned} \varphi_{g \cdot h}(x) &= (g \cdot h) \circ x \\ &= g \circ (h \circ x) \\ &= g \circ (\varphi_h(x)) \\ &= \varphi_g(\varphi_h(x)) \\ &= (\varphi_g \cdot \varphi_h)(x) \end{aligned}$$

Sei umgekehrt ein Homomorphismus

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow S(X) \\ g &\longmapsto \varphi_g \end{aligned}$$

gegeben. Dann konstruieren wir die Wirkung von G auf X wie folgt:

$$\begin{aligned}\circ : G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto \varphi_g(x) = g \circ x\end{aligned}$$

Da der Homomorphismus φ das neutrale Element $e \in G$ in die Identität in $S(X)$ abbildet, gilt $x = \varphi_e(x) = e \circ x$ und damit ist (W1) erfüllt.

Da φ ein Homomorphismus ist, gilt $\varphi_{g \cdot h} = \varphi_g \cdot \varphi_h$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}(g \cdot h) \circ x &= \varphi_{g \cdot h}(x) \\ &= (\varphi_g \cdot \varphi_h)(x) \\ &= \varphi_g(\varphi_h(x)) \\ &= g \circ (h \circ x)\end{aligned}$$

Und damit ist (W2) erfüllt. □

Da jede Gruppe G durch die Gruppenverknüpfung auf sich selbst wirkt, ergibt sich aus dem Lemma folgendes Korollar:

Korollar 7.4. Satz von Cayley

Jede Gruppe G der Ordnung $n = |G|$ kann in die symmetrische Gruppe S_n eingebettet werden. Somit kann jede Gruppe als Untergruppe einer symmetrischen Gruppe aufgefasst werden.

Bemerkung 7.5. In den meisten Fällen ist die Einbettung in die symmetrische Gruppe S_n zu gross. Das heisst es gibt ein kleineres $m < n$ für das bereits $G \hookrightarrow S_m$. Nur für folgende 3 Typen von Gruppen gibt es kein kleineres m :

1. Kleinsche Vierergruppe $C_2 \times C_2$
2. Zyklische Gruppen, deren Ordnung eine Primzahlpotenz ist C_{p^k}
3. Verallgemeinerte Quaternionengruppen Q_{2^k} mit $k \geq 3$

Wir benötigen noch einige Aussagen aus der Gruppentheorie über Gruppen, Nebenklassen und Gruppenoperationen, die wir im folgenden ausführen.

7.2. Bahn-Standgruppen Satz

Definition 7.6. Sei $H < G$ eine Untergruppe in G und $a \in G$. Dann heisst

$$aH = \{ a \cdot h \mid h \in H \}$$

Linksnebenklasse.

Satz 7.7. Sei $H < G$ eine Untergruppe in G .

a) Die Anzahl der Elemente in den Linksnebenklassen von H ist gleich der Anzahl der Elemente von H .

b)

$$aH \cap bH = \begin{cases} \emptyset & \text{oder} \\ aH = bH \end{cases}$$

Das heisst: die Linksnebenklassen bilden eine Zerlegung von G .

c) $a \in aH$

Beweis. ad a) Die Abbildung

$$\begin{aligned} H &\longrightarrow aH \\ h &\longmapsto a \cdot h \end{aligned}$$

ist nach Definition von Linksnebenklassen surjektiv und wegen der Kürzungsregel auch injektiv und damit bijektiv. Also haben alle Linksnebenklassen von H genau so viele Elemente wie H selbst.

ad b) Wir nehmen an $aH \cap bH \neq \emptyset$. Es genügt zu zeigen, dass $aH \subseteq bH$. Durch Vertauschung von a und b erhalten wir analog die andere Inklusion.

Für $c \in aH \cap bH$ gibt es Elemente $h_1, h_2 \in H$ mit

$$c = a \cdot h_1 = b \cdot h_2$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} a &= b \cdot h_2 \cdot h_1^{-1} \\ aH \ni a \cdot h &= b \cdot h_2 \cdot h_1^{-1} \cdot h \in bH \end{aligned}$$

ad c) $a = a \cdot e \in aH$

□

Satz 7.8. Sei G eine Gruppe mit endlich vielen Elementen und $H < G$ eine Untergruppe. Dann teilt die Ordnung von H die Ordnung von G .

$$|H| \text{ teilt } |G|$$

Beweis. Nach Satz 7.7 a) besitzen alle Linksnebenklassen von H dieselbe Anzahl von Elementen wie H . Nach Aussage b) des Satzes bilden die Nebenklassen von H eine Partition von G . Daraus folgt

$$|H| \cdot [G : H] = |G| \quad \text{und} \quad |H| \text{ teilt } |G|$$

□

Zwei Begriffe sind im Zusammenhang mit Gruppenoperationen noch wichtig.

Definition 7.9. Sei G eine Gruppe, die auf der Menge X operiert. Dann heisst

$$G \circ x = \{g \circ x \mid g \in G\} \quad \text{für } x \in X$$

Bahn durch x .

Die Menge der Bahnen wird mit X/G bezeichnet.

Beispiel 7.10. Zur Veranschaulichung stelle man sich die Gruppe G aller Drehungen um den Ursprung in der Euklidischen Ebene vor. Die Menge X , auf der die Gruppe operiert, sind alle Punkte der Ebene. Eine Bahn bildet der Ursprung $o = (0, 0)$. Die Bahnen aller anderen Punkte sind Kreise mit dem Ursprung als Mittelpunkt.

Lemma 7.11. Die Gruppe G operiere auf der Menge X . Dann gilt wie für Nebenklassen in Satz 7.7

a) x liegt in der Bahn von x .

$$x \in G \circ x$$

b) Alle Bahnen bilden eine Zerlegung von X . Das heisst:

$$\text{für alle } x, y \in X \text{ gilt } \begin{cases} G \circ x \cap G \circ y = \emptyset & \text{oder} \\ G \circ x = G \circ y \end{cases}$$

Beweis. ad a)

$$x = e \circ x \quad \Rightarrow \quad x \in G \circ x$$

ad b) Falls $G \circ x \cap G \circ y = \emptyset$ ist nichts zu zeigen.

Sei $z \in G \circ x \cap G \circ y$. Dann zeigen wir

$$G \circ x \subseteq G \circ y$$

Die andere Inklusion folgt analog.

$$\begin{aligned}g \in G \circ x &\Rightarrow \exists g \in G \text{ mit } z = g \circ x \\g \in G \circ y &\Rightarrow \exists h \in G \text{ mit } z = h \circ y \\&\Rightarrow x = (g^{-1} \cdot h) \circ y\end{aligned}$$

Für ein beliebiges $w \in G \circ x$ gibt es ein $g_1 \in G$ so dass gilt

$$\begin{aligned}w &= g_1 \circ x \\&= g_1 \circ (g^{-1} \cdot h) \circ y \\&= (g_1 \cdot g^{-1} \cdot h) \circ y \\&\in G \circ y\end{aligned}$$

□

Definition 7.12. Die Gruppe G operiere auf der Menge X . Für jedes Element $x \in X$ heisst

$$G_x = \{ g \in G \mid g \circ x = x \}$$

Standgruppe oder Stabilisator von x .

Lemma 7.13. Die Gruppe G operiere auf der Menge X . Die Standgruppen $G_x, x \in X$ sind Untergruppen in G .

Beweis. Wir müssen die Bedingungen für Untergruppen nachweisen.

1.

$$e \circ x = x \Rightarrow e \in G_x \neq \emptyset$$

2. Sei $a \in G_x$. Dann gilt

$$\begin{aligned}a \circ x &= x \\ \Rightarrow x &= a^{-1} \circ x \\ \Rightarrow a^{-1} &\in G_x\end{aligned}$$

3. Seien $a, b \in G_x$. Dann gilt

$$\left. \begin{array}{l} a \circ x = x \\ b \circ x = x \end{array} \right\} \Rightarrow (a \cdot b) \circ x = a \circ (b \circ x)$$

$$= a \circ x$$

$$= x$$

$$\Rightarrow a \cdot b \in G_x$$

□

Nun können wir eine wichtige Verallgemeinerung des Satzes von Lagrange 7.8 formulieren und beweisen.

Satz 7.14. *Bahn-Standgruppen Satz*

Sei G eine endliche Gruppe und G operiere auf der Menge X . Dann gilt:

$$|G| = |G \circ x| \cdot |G_x| \quad \text{für alle } x \in X$$

Das heisst: das Produkt aus der Anzahl der Bahnen von x mit der Anzahl der Elemente in der Standgruppe ist gleich die Ordnung der Gruppe.

Dies ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Lagrange. Eine Gruppe G operiere auf der Menge $X = G/H$ der Linksnebenklassen einer Untergruppe H mit der Gruppen Verknüpfung. Die Standgruppe von H ist

$$G_H = \{g \in G \mid gH = H\} = H$$

Die Bahn von H bilden alle Linksnebenklassen

$$G \circ H = \{gH \mid g \in G\} = G/H$$

Die Anwendung des Satzes von Lagrange ergibt

$$|G| = |H| \cdot |G/H| = |G_x| \cdot |G \circ H|$$

Beweis. Die Abbildung

$$\begin{array}{l} \varphi : G \longrightarrow G \circ x \\ g \longmapsto g \circ x \end{array}$$

von der Gruppe G in die Bahn durch x ist nach Definition surjektiv.

$$\begin{aligned}\varphi(a) = \varphi(b) &\Leftrightarrow a \circ x = b \circ x \\ &\Leftrightarrow (b^{-1} \cdot a) \circ x = x \\ &\Leftrightarrow b^{-1} \cdot a \in G_x \\ &\Leftrightarrow a \cdot G_x = b \cdot G_x\end{aligned}$$

Das heisst:

$$\varphi' : G/G_x \longrightarrow G \circ x$$

ist bijektiv. Nach dem Satz von Lagrange 7.8 gilt

$$\begin{aligned}|G/G_x| \cdot |G_x| &= |G| \\ |G \circ x| \cdot |G_x| &= |G|\end{aligned}$$

□

7.3. Lemma von Burnside

Bevor wir nun das Lemma von Burnside formulieren und beweisen, sind noch folgende Hinweise auf die Namensgebung und geschichtliche Entwicklung interessant. Burnside erwähnt und beweist das Lemma 1897 in seinem Buch "Theory of groups of finite order" und schreibt es Frobenius zu. Tatsächlich war es jedoch Cauchy bereits im Jahre 1845 bekannt. Daher ist das Lemma auch als Cauchy-Frobenius-Lemma oder das Lemma, das nicht von Burnside ist, bekannt.

Lemma 7.15. *Lemma von Burnside*

Sei G eine endliche Gruppe und G operiere auf der Menge X . Für ein Element $g \in G$ bezeichnet

$$X^g := \{x \in X \mid g \circ x = x\}$$

die Menge der Fixpunkte in X unter dem Element $g \in G$. Dann gilt für die Anzahl der Bahnen $|X/G|$

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

Das Lemma bringt die Anzahl der Bahnen in Zusammenhang mit der Anzahl der Fixpunkte. Die Anzahl der Bahnen ist der Mittelwert aller Fixpunkte der Gruppenelemente.

Beweis. Die Anzahl der Fixpunkte in X unter Elemente $g \in G$ ergibt aufsummiert

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} |X^g| &= |\{(g, x) \in G \times X \mid g \circ x = x\}| \\ &= \sum_{x \in X} |G_x| \\ &= \sum_{B \in X/G} \sum_{y \in B} |G_y| \end{aligned}$$

wobei B eine Bahn in X darstellt und G_x die Stabilisatoren sind. Da X nach Lemma 7.11 die disjunkte Vereinigung der Bahnen ist, kann aus jeder Bahn ein Repräsentant y_0 gewählt werden. Damit erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{y \in B} |G_y| &= \sum_{y \in B} |G_{y_0}| \\ &= |G \circ y_0| \cdot |G_{y_0}| \\ &= |G| \quad \text{nach dem Bahn-Standardgruppen-Satz 7.14} \end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} |X^g| &= \sum_{B \in X/G} \sum_{y \in B} |G_y| \\ &= \sum_{B \in X/G} |G| \\ &= |X/G| \cdot |G| \end{aligned}$$

□

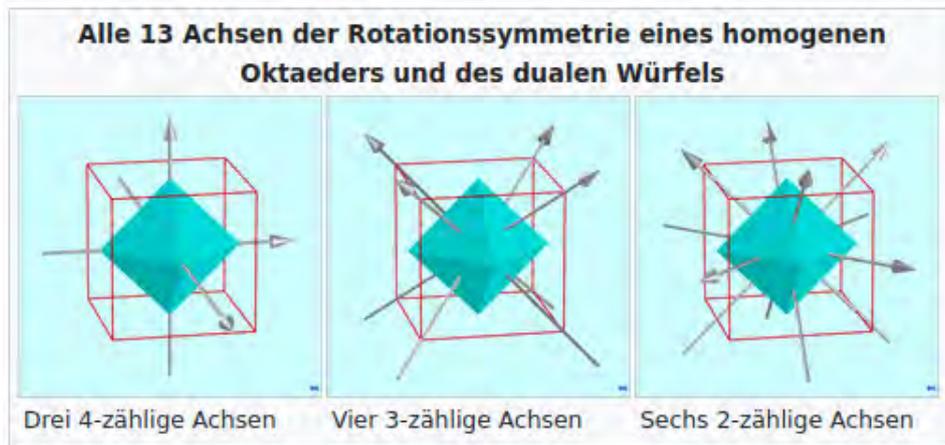
7.4. Beispiel: Färbungen eines Würfels

Das folgende Beispiel zeigt eine Anwendung des Lemmas von Burnside.

Beispiel 7.16. Die Seiten eines Würfels werden mit 3 verschiedenen Farben eingefärbt. Die Menge aller möglichen Seitenfärbungen bezeichnen wir mit X . Es gibt insgesamt $3^6 = 729$ Möglichkeiten, die 6 Seiten des Würfels mit 3 Farben einzufärben.

Die Drehgruppe des Würfels operiert auf X und einige Einfärbungen gehen durch Drehungen des Würfels ineinander über. Das heisst, sie liegen in derselben Bahn. Alle Einfärbungen in derselben Bahn bilden ein Muster, das bei Drehungen erhalten bleibt. Mit Hilfe des Lemmas von Burnside kann die Anzahl der verschiedenen Muster bestimmt werden.

Wir betrachten zunächst die Drehgruppe des Würfels. Sie wird auch Oktaeder Gruppe genannt, da Oktaeder und Würfel als duale Körper dieselbe Drehgruppe besitzen. Die Elemente der Oktaeder Gruppe können aus den Rotationsachsen bestimmt werden.



(Aus <https://de.wikipedia.org/wiki/Oktaedergruppe>)

Es gibt 3 Achsen durch gegenüberliegende Seiten des Würfels, die 3 Drehungen um jeweils 90° erlauben.

Es gibt 4 Achsen durch gegenüberliegende Ecken des Würfels, die 2 Drehungen um jeweils 120° erlauben.

Und es gibt 6 Achsen durch gegenüberliegende Kanten des Würfels, die eine Drehung um 180° erlauben.

Zusammen mit der Identität ergibt dies $3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 6 + 1 = 24$ Drehungen. Die Oktaeder Gruppe ist isomorph zur symmetrischen Gruppe S_4 der Permutationen der 4 Drehachsen durch gegenüberliegende Ecken.

Nun untersuchen wir die Anzahl der Fixpunkte in den Einfärbungen X bei den einzelnen Drehungen. Die Drehungen um die 3 Achsen durch gegenüberliegende Seiten um 90° und 270° lassen die Farben dieser Seiten fest. Die restlichen 4 Seiten werden gedreht und müssen somit die gleiche Farbe haben. Jede solche Drehung läßt also 3^3 Einfärbungen fest. Und es gibt insgesamt $3 \cdot 2 = 6$ solche Drehungen.

Die Drehungen um die 3 Achsen durch gegenüberliegende Seiten um 180° lassen die Farben dieser Seiten fest und führen von den restlichen 4 Seiten gegenüberliegende Paare ineinander über. Diese 3 Drehungen lassen also 3^4 Einfärbungen fest.

Bei Drehungen um Achsen durch gegenüberliegende Ecken des Würfels müssen die drei angrenzenden Seiten dieser Ecken jeweils gleich gefärbt sein. Jede solche Drehung läßt also 3^2 Einfärbungen fest. Und es gibt insgesamt $4 \cdot 2 = 8$ solche Drehungen.

Bei Drehungen um Achsen durch gegenüberliegende Kanten des Würfels müssen die angrenzenden Seiten dieser Kanten jeweils gleich gefärbt sein sowie die restlichen beiden

Seiten. Jede solche Drehung läßt also 3^3 Einfärbungen fest. Und es gibt insgesamt 6 solche Drehungen.

Die Identität läßt natürlich alle 3^6 Einfärbungen fest. Insgesamt erhalten wir

$$\frac{1}{24}(6 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^4 + 8 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3^3 + 3^6) = 57$$

verschiedene Muster.

Mit einer beliebigen Anzahl n von Farben berechnet sich die Anzahl verschiedener Einfärbungen eines Würfels mit folgender Formel:

$$\frac{1}{24}(n^6 + 3 \cdot n^4 + 12 \cdot n^3 + 8 \cdot n^2)$$

Mit 2 Farben ergeben sich nach der Formel

$$\begin{aligned} \frac{1}{24}(2^6 + 3 \cdot 2^4 + 12 \cdot 2^3 + 8 \cdot 2^2) &= \frac{1}{24}(64 + 3 \cdot 16 + 12 \cdot 8 + 8 \cdot 4) \\ &= \frac{1}{24}(64 + 48 + 96 + 32) \\ &= \frac{1}{24} \cdot 240 \\ &= 10 \end{aligned}$$

verschiedene Muster.

7.5. Zykelindikator

Der Abzählssatz von Polya stellt eine Verallgemeinerung des Lemmas von Burnside dar. Zur Formulierung benötigen wir den Begriff des Zykelindikators oder Zykelzeigers. Dazu benötigen wir einige Grundkenntnisse über Permutationen.

Definition 7.17. Eine Permutation $\pi = (\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)) \in S_n$ heisst zyklisch mit der Länge k oder k -Zykel, wenn sie $k \leq n$ paarweise verschiedene Elemente (Zahlen) i_1, i_2, \dots, i_k im Kreis vertauscht

$$\begin{aligned} \pi(i_1) &= i_2 \\ \pi(i_2) &= i_3 \\ &\dots \\ \pi(i_k) &= i_1 \end{aligned}$$

und alle anderen Zahlen fest läßt.

Notation: (i_1, i_2, \dots, i_k)

Bemerkung 7.18. Da eine zyklische Vertauschung der Zahlen in einem Zykel den Zykel nicht ändert, wählt man üblicherweise die kleinste Zahl als erste.

Das Inverse eines Zykel ist wieder ein Zykel.

Die Hintereinanderausführung zweier Zykel ist jedoch im allgemeinen kein Zykel mehr, so dass die Zykel keine Untergruppe bilden.

Bemerkung 7.19. Die Konjugation eines Zykel $\pi = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ mit einer beliebigen Permutation $\sigma \in S_n$ ist wieder ein Zykel und es gilt

$$\sigma \cdot \pi \cdot \sigma^{-1} = (\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_k))$$

Lemma 7.20. Jede Permutation in S_n lässt sich bis auf die Reihenfolge eindeutig als Komposition von höchstens n disjunkten Zykeln schreiben.

Daraus ergibt sich für jede Permutation eine Kennzahl, die nun als Zykeltyp definiert wird.

Definition 7.21. Sei $\sigma \in S_n$ eine Permutation. Für σ existiert eine bis auf die Reihenfolge eindeutige Zykeldarstellung mit maximal n disjunkten Zykel. Seien b_j für $1 \leq j \leq n$ die Anzahlen der Zykel der Länge j . Dann heisst das Monom

$$typ(\sigma) = t_1^{b_1} t_2^{b_2} \dots t_n^{b_n} = \prod_{j=1}^n t_j^{b_j}$$

der Zykeltyp von σ .

Beispiel 7.22. Die Permutation

$$\begin{aligned} \sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix} \\ &= (1\ 2\ 4\ 3)(5)(6\ 7) \end{aligned}$$

hat den Zykeltyp

$$typ(\sigma) = t_1^1 t_2^1 t_4^1$$

Satz 7.23. Die Anzahl der verschiedenen Zykeltypen in der Permutationsgruppe S_n entspricht der Anzahl der ungeordneten Partitionen von n (Folge A000041 in OEIS).

Beweis. Da in der Zykeldarstellung einer Permutation jede Zahl genau einmal vorkommt, gilt

$$1 \cdot b_1 + 2 \cdot b_2 + \dots + n \cdot b_n = n$$

Dabei werden Zykel der Länge 1 mit gezählt. Für die Summe der Zykellängen k_i gilt

$$k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$$

Dabei ist m die Anzahl der Zykel. □

Nach dem Satz von Cayley 7.4 kann jede endliche Gruppe in eine symmetrische Gruppe eingebettet werden. Somit kann auch jedem Gruppenelement ein Zykeltyp zugeordnet werden. Dieser ist dann von der Einbettung abhängig.

Der nächste Schritt fasst die Zykeltypen aller Elemente einer Gruppe zu einer Charakterisierung für die Gruppe zusammen.

Definition 7.24. Sei $G < S_n$ eine Permutationsgruppe in S_n und $typ(\sigma) = \prod_{j=1}^n t_j^{b_j}$ der Zykeltyp eines Elementes $\sigma \in G$. Dann heisst

$$Z(G) = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \prod_{j=1}^n t_j^{b_j}$$

Zykelindikator oder Zykelzeiger von G in S_n .

Der Zykelindikator einer Gruppe ist von der Einbettung der Gruppe in eine symmetrische Gruppe abhängig.

Beispiel 7.25. Zykelindikator der symmetrischen Gruppe S_3

Die 6 Permutationen dieser Gruppe sind in Zykelschreibweise

	Zykel	Zykeltyp
$\sigma_1 =$	$(1)(2)(3)$	t_1^3
$\sigma_2 =$	$(1)(23)$	$t_1 \cdot t_2$
$\sigma_3 =$	$(12)(3)$	$t_1 \cdot t_2$
$\sigma_4 =$	(123)	t_3
$\sigma_5 =$	(132)	t_3
$\sigma_6 =$	$(13)(2)$	$t_1 \cdot t_2$

Die Identität σ_1 besteht aus 6 Zykel der Länge 1. Es gibt 2 Permutationen σ_4 und σ_5 mit jeweils einem Zykel der Länge 3. Und es gibt 3 Permutationen, die aus einem Zykel der

Länge 1 und einem Zykel der Länge 2 bestehen. Daraus ergibt sich der Zykelindikator zu

$$Z(S_3) = \frac{1}{6} (t_1^3 + 3 \cdot t_1 \cdot t_2 + 2 \cdot t_3)$$

Beispiel 7.26. Zykelindikator der zyklischen Gruppe $C_3 < S_3$

Die zyklische Gruppe C_3 ist eine Untergruppe in der symmetrischen Gruppe S_3 . Die Elemente sind in Zykelschreibweise

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= (1)(2)(3) \\ \sigma_4 &= (123) \\ \sigma_5 &= (132)\end{aligned}$$

Wie im vorigen Beispiel ergibt sich der Zykelindikator zu

$$Z(C_3) = \frac{1}{3} (t_1^3 + 2 \cdot t_3)$$

Beispiel 7.27. Zykelindikator der Drehgruppe W eines Würfels

Die Drehgruppe eines Würfels wurde schon in Beispiel 7.16 untersucht. Sie hat 24 Elemente und ist isomorph zur symmetrischen Gruppe S_4 . Hier soll jedoch die Einbettung der Würfelgruppe $W < S_6$ in die symmetrische Gruppe S_6 zugrunde gelegt werden, also die Wirkung auf die 6 Seiten des Würfels. Zur Bestimmung des Zykelindikators $Z(W)$ werden die verschiedenen Rotationen des Würfels um verschiedene Achsen und ihre Zykeltypen betrachtet.

- Die Identität hat den Zykeltyp t_1^6 .
- Rotationen um die 3 Achsen durch gegenüberliegende Seitenmitten lassen diese fest. Bei einer Drehung um 90° vertauschen sie die übrigen Seiten zyklisch. Dies führt auf den Zykeltyp $6 \cdot t_1^2 \cdot t_4$, denn es gibt 2 Richtungen der Achsen.
- Bei Drehungen um dieselben Achsen jedoch um 180° entstehen 2 Zyklen der Länge 2. Dies führt auf den Zykeltyp $3 \cdot t_1^2 \cdot t_2^2$.
- Rotationen um die 4 Achsen durch gegenüberliegende Ecken vertauschen die angrenzenden 3 Seiten zyklisch. Unter Berücksichtigung der Achsenrichtung führt dies auf den Zykeltyp $8 \cdot t_3^2$.
- Rotationen um die 6 Achsen durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten um 180° vertauschen jeweils 2 angrenzende Seiten und die übrigen 2 Seiten. Dies führt auf den Zykeltyp $6 \cdot t_2^3$.

Damit sind alle 24 Drehungen des Würfels erfaßt und der Zykelindikator ergibt sich zu

$$Z(W) = \frac{1}{24} (t_1^6 + 6 \cdot t_1^2 \cdot t_4 + 3 \cdot t_1^2 \cdot t_2^2 + 8 \cdot t_3^2 + 6 \cdot t_2^3)$$

Das folgende Beispiel zeigt die Abhängigkeit des Zykelindikators von der Einbettung in eine symmetrische Gruppe deutlich.

Beispiel 7.28. Zykelindikator der symmetrischen Gruppe S_4

Die 24 Permutationen dieser Gruppe können als Wirkung der Würfelgruppe auf die 4 Achsen durch gegenüberliegende Ecken aufgefaßt werden und sind in Zykelschreibweise

	Zykel	Zykeltyp
σ_1	$= (1)(2)(3)(4)$	t_1^4
σ_2	$= (1)(2)(34)$	$t_1^2 \cdot t_2$
σ_3	$= (1)(23)(4)$	$t_1^2 \cdot t_2$
σ_4	$= (1)(24)(3)$	$t_1^2 \cdot t_2$
σ_5	$= (12)(3)(4)$	$t_1^2 \cdot t_2$
σ_6	$= (13)(2)(4)$	$t_1^2 \cdot t_2$
σ_7	$= (14)(2)(3)$	$t_1^2 \cdot t_2$
σ_8	$= (123)(4)$	$t_1 \cdot t_3$
σ_9	$= (132)(4)$	$t_1 \cdot t_3$
σ_{10}	$= (124)(3)$	$t_1 \cdot t_3$
σ_{11}	$= (142)(3)$	$t_1 \cdot t_3$
σ_{12}	$= (134)(2)$	$t_1 \cdot t_3$
σ_{13}	$= (143)(2)$	$t_1 \cdot t_3$
σ_{14}	$= (1)(234)$	$t_1 \cdot t_3$
σ_{15}	$= (1)(243)$	$t_1 \cdot t_3$
σ_{16}	$= (12)(34)$	t_2^2
σ_{17}	$= (13)(24)$	t_2^2
σ_{18}	$= (14)(23)$	t_2^2
σ_{19}	$= (1234)$	t_4
σ_{20}	$= (1243)$	t_4
σ_{21}	$= (1324)$	t_4
σ_{22}	$= (1342)$	t_4
σ_{23}	$= (1423)$	t_4
σ_{24}	$= (1432)$	t_4

Daraus ergibt sich der Zykelindikator zu

$$Z(S_4) = \frac{1}{24} (t_1^4 + 6 \cdot t_1^2 \cdot t_2 + 8 \cdot t_1 \cdot t_3 + 3 \cdot t_2^2 + 6 \cdot t_4)$$

7.6. Abzählssatz von Polya

Satz 7.29. Abzählssatz von Polya

Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung m , die auf einer Menge X mit n Elementen operiert. In der Permutationsgruppe G hat jedes Element $g \in G$ eine Zykeldarstellung mit $b_j(g)$ Zykel der Länge j mit $1 \leq j \leq m$ und es gilt

$$n = 1 \cdot b_1(g) + 2 \cdot b_2(g) + \dots + m \cdot b_m(g)$$

Der Zykelindikator von G ist dann gegeben durch

$$Z_G(t_1, t_2, \dots, t_m) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} t_1^{b_1(g)} \cdot t_2^{b_2(g)} \dots t_m^{b_m(g)}$$

Weiter sei eine Menge Y mit k Elementen (Farben) gegeben sowie eine Abbildung

$$f : X \longrightarrow Y$$

die jedem Element aus X eine Farbe zuordnet. Die Menge der Färbungen bezeichnen wir mit

$$\begin{aligned} F &= Y^X \\ &= \{ f : X \longrightarrow Y \} \end{aligned}$$

Die Wirkung von G auf X läßt sich auf die Färbungen F wie folgt fortsetzen:

$$\begin{aligned} \circ : G \times F &\longrightarrow F \\ (g, f) &\longmapsto g \circ f : \begin{array}{ccc} X &\longrightarrow & Y \\ x &\longmapsto & (g \circ f)(x) = f(g^{-1}(x)) \end{array} \end{aligned}$$

Die Bahnen von G in F bilden Äquivalenzklassen, die sogenannten Muster μ , die zur Menge M der Muster zusammengefasst werden.

Jeder Farbe $y \in Y$ wird nun ein Gewicht zugeordnet:

$$w : Y \longrightarrow \mathbb{Q}$$

Dies läßt sich auf die Menge F der Färbungen fortsetzen:

$$\begin{aligned} w : F &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ f &\longmapsto w(f) = \prod_{x \in X} w(f(x)) \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\sum_{\mu \in M} w(\mu) = Z_G\left(\sum_{y \in Y} w(y), \sum_{y \in Y} w^2(y), \dots\right)$$

Das heisst, die Summe der Gewichte über alle Muster steht in Verbindung zum Zykelindikator.

Beweis. Zunächst wird erläutert, dass das Gewicht für ein Muster wohldefiniert ist. Dazu muss gezeigt werden, dass zwei Färbungen eines Musters dasselbe Gewicht haben. Dabei gehen zwei Färbungen eines Muster durch die Wirkung eines Gruppenelements $g \in G$ auseinander hervor.

$$\begin{aligned} w(g \circ f) &= \prod_{x \in X} w(f(g^{-1}(x))) \\ &= \prod_{\tilde{x} \in X} w(f(\tilde{x})) \quad \text{mit } \tilde{x} = g^{-1}(x) \\ &= w(f) \end{aligned}$$

Da die Muster Äquivalenzklassen der Färbungen unter der Wirkung der Gruppe sind, wird jedes Muster $\mu \in M$ durch alle Gruppenelemente in sich übergeführt. Nach dem Lemma von Burnside 7.15 gilt:

$$1 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mu^g|$$

wobei μ^g die Fixpunkte im Muster sind:

$$\mu^g = \{ f \in \mu \mid g \circ f = f \}$$

Für die Gewichte gilt:

$$w(\mu) = w(f) \quad \text{für alle } f \in \mu$$

Durch Multiplikation mit $w(\mu)$ erhalten wir also:

$$w(\mu) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{f \in \mu, g \circ f = f} w(f)$$

Da die Gruppe G auf die Menge X wirkt, hat jedes $g \in G$ eine Zykeldarstellung $g = Z_1 \cdot Z_2 \cdots Z_r$ mit $b_j(g)$ Zykel der Länge j mit $1 \leq j \leq m$ und dem Typ

$$\text{typ}(g) = t_1^{b_1} t_2^{b_2} \cdots t_m^{b_m}$$

Jeder Zykel Z_j führt j Elemente $x_i \in X, 1 \leq i \leq j$ zyklisch in sich über. Für eine Färbung f mit $g \circ f = f$ gilt nun

$$\begin{aligned} f(x_i) &= (g \circ f)(x_i) \\ &= f(g^{-1}(x_i)) \\ &= f(x_{\tilde{i}}) \quad \text{mit } 1 \leq \tilde{i} \leq j \end{aligned}$$

Somit ist die Färbung auf dem gesamten Zykel konstant. Umgekehrt liefert jede Verteilung von Farben f_1, f_2, \dots, f_r auf die Zykel $Z_1 \cdot Z_2 \cdots Z_r$ von g eine Färbung f mit $g \circ f = f$.

Für das Gewicht der Färbung gilt

$$\begin{aligned} w(f) &= \prod_{x \in X} w(f(x)) \\ &= \prod_{\rho=1}^r \prod_{x \in Z_\rho} w(f(x)) \\ &= \prod_{\rho=1}^r \prod_{x \in Z_\rho} w(f(Z_\rho)) \\ &= \prod_{\rho=1}^r w(f(Z_\rho))^{l_\rho} \quad \text{mit } l_\rho \text{ Länge des Zyklus } Z_\rho \end{aligned}$$

Dies wird nun über alle Färbungen aufsummiert, die für ein festes $g \in G$ in sich

übergehen.

$$\begin{aligned}
 \sum_{g \circ f = f} w(f) &= \sum_{g \circ f = f} \prod_{\rho=1}^r w(f(Z_\rho))^{l_\rho} \\
 &= \sum_{f_1 \in F} \cdots \sum_{f_r \in F} \prod_{\rho=1}^r w(f_\rho)^{l_\rho} \\
 &= \prod_{\rho=1}^r \sum_{f \in F} w(f)^{l_\rho} \\
 &= \prod_{j=1}^{\infty} \prod_{l_\rho=j} \sum_{f \in F} w(f)^j \\
 &= \prod_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{f \in F} w(f)^j \right)^{b_j}
 \end{aligned}$$

Nun bilden wir den Mittelwert über alle Elemente $g \in G$.

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{g \circ f = f} w(f) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \prod_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{f \in F} w(f)^j \right)^{b_j(g)}$$

Ein Vergleich mit der Definition des Zykelindikators

$$Z_G(t_1, t_2, \dots, t_m) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} t_1^{b_1(g)} \cdot t_2^{b_2(g)} \cdots t_m^{b_m(g)}$$

ergibt die Behauptung. □

Wenn alle Gewichte konstant 1 sind, erhält man folgende vereinfachte Version des Abzählssatzes von Polya.

Korollar 7.30. *Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung m , die auf einer Menge X mit n Elementen operiert. Weiter sei eine Menge Y mit k Elementen (Farben) gegeben sowie eine Abbildung*

$$f : X \longrightarrow Y$$

die jedem Element aus X eine Farbe zuordnet. Die Gruppe G induziert auf der Menge der Färbungen Y^X eine Äquivalenzrelation, deren Äquivalenzklassen (Muster) genau die Bahnen von G in Y^X sind.

Dann kann die Anzahl der verschiedenen Muster durch den Zykelindikator ausgedrückt werden:

$$|Y^X/G| = Z_G(k, k, \dots, k)$$

Für einige Anwendungen ist eine andere Formulierung des Abzählssatzes von Polya mit erzeugenden Funktionen von Vorteil.

Satz 7.31. *Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung m , die auf einer Menge X mit n Elementen operiert. Weiter sei eine Menge Y mit k Elementen (Farben) gegeben. Sei weiter*

$$\kappa : Y \longrightarrow \mathbb{N}_0^k$$

eine Indexfunktion, die jeder Farbe einen Multi-Index zuordnet. Umgekehrt kann aus jedem k -Tupel natürlicher Zahlen die Anzahl der zugehörigen Farben bestimmt werden: $|\kappa^{-1}(j_1, \dots, j_k)|$. Damit definieren wir eine multivariate, erzeugende Funktion für die Farben

$$w(t_1, \dots, t_k) = \sum_{j_1, \dots, j_k} |\kappa^{-1}(j_1, \dots, j_k)| \cdot t_1^{j_1} \cdots t_k^{j_k}$$

Die Funktion κ induziert eine Gewichtsfunktion $\tilde{\kappa}$ auf der Menge der Muster (Bahnen von G in der Menge der Färbungen Y^X):

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa} : Y^X/G &\longrightarrow \mathbb{N}_0^k \\ G \circ f &\longmapsto \sum_{i=1}^n w(f(i)) \end{aligned}$$

Umgekehrt kann aus jedem k -Tupel natürlicher Zahlen die Anzahl der zugehörigen Muster bestimmt werden: $|\tilde{\kappa}^{-1}(j_1, \dots, j_k)|$. Daraus erhalten wir eine weitere multivariate, erzeugende Funktion für die Muster

$$\tilde{w}(t_1, \dots, t_k) = \sum_{j_1, \dots, j_k} |\tilde{\kappa}^{-1}(j_1, \dots, j_k)| \cdot t_1^{j_1} \cdots t_k^{j_k}$$

Dann kann die erzeugende Funktion der Muster durch den Zykelindikator ausgedrückt werden:

$$\tilde{w}(t_1, \dots, t_k) = Z_G(w(t_1, \dots, t_k), w(t_1^2, \dots, t_k^2), \dots, w(t_1^n, \dots, t_k^n))$$

Beweis. Für einen Multi-Index $\iota = (j_1, \dots, j_k)$ ist nach dem Lemma von Burnside 7.15 die Anzahl der Bahnen gegeben durch

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |(Y^X)_{\iota, g}|$$

wobei $(Y^X)_{\iota, g}$ die Menge der Färbungen zum Multi-Index ι ist, die unter der Wirkung

von g fest bleiben. Aufsummiert über alle möglichen Multi-Indices ergibt sich

$$\tilde{w}(t_1, \dots, t_k) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{\iota} |(Y^X)_{\iota, g}| \cdot t_1^{j_1} \cdots t_k^{j_k} \quad (*)$$

Andrerseits trägt ein Gruppenelement g mit dem Zykeltyp $i_1(g), \dots, i_n(g)$ folgenden Term zum Zykelindex von G bei:

$$t_1^{i_1(g)}, \dots, t_n^{i_n(g)}$$

Dabei läßt g eine Färbung $f : X \rightarrow Y$ genau dann fest, wenn die Färbung f auf jedem Zykel ζ von g konstant ist. Für jeden Zykel erhält man so eine erzeugende Funktion

$$w(t_1^{|\zeta|}, \dots, t_k^{|\zeta|})$$

Daraus folgt, dass die erzeugende Funktion über die Multi-Indices der Fixpunkte von g das Produkt der erzeugenden Funktionen der Zykel von g ist.

$$\begin{aligned} \sum_{\iota} |(Y^X)_{\iota, g}| &= \prod_{\zeta \text{ Zykel von } g} w(t_1^{|\zeta|}, \dots, t_k^{|\zeta|}) \\ &= w(t_1, \dots, t_k)^{i_1(g)} \cdot w(t_1^2, \dots, t_k^2)^{i_2(g)} \cdots w(t_1^n, \dots, t_k^n)^{i_n(g)} \end{aligned}$$

Aufsummiert über alle Gruppenelemente und eingesetzt in die Gleichung (*) ergibt sich die Behauptung. \square

7.7. Anwendungsbeispiele für den Abzählssatz von Polya

Wir betrachten in den folgenden Beispielen einige Anwendungen des Abzählssatzes von Polya. Als erstes das bereits bekannte Beispiel von gefärbten Würfeln.

Beispiel 7.32. Die Seiten eines Würfels werden mit k Farben eingefärbt. Der Zykelindikator der Würfelgruppe W bezüglich der Wirkung auf die 6 Seiten des Würfels - also bezüglich der symmetrischen Gruppe S_6 - ist gegeben durch

$$Z_W(t_1, t_2, t_3, t_4) = \frac{1}{24} (t_1^6 + 6 \cdot t_1^2 \cdot t_4 + 3 \cdot t_1^2 \cdot t_2^2 + 8 \cdot t_3^2 + 6 \cdot t_2^3)$$

Wenn jede Farbe das Gewicht 1 hat, ergibt sich für die Anzahl der verschiedenen Muster

M aus dem Abzählssatz von Polya

$$\begin{aligned} |M| &= Z_W(k, k, \dots, k) \\ &= \frac{1}{24} (k^6 + 6 \cdot k^3 + 3 \cdot k^4 + 8 \cdot k^2 + 6 \cdot k^3) \\ &= \frac{1}{24} (k^6 + 3 \cdot k^4 + 12 \cdot k^3 + 8 \cdot k^2) \end{aligned}$$

Die ersten Anzahlen stellen wir in folgender Tabelle zusammen:

Farben	Muster
1	1
2	10
3	57
4	240
5	800
6	2226
7	5390

Das folgende Beispiel verwendet den Abzählssatz von Polya in der Formulierung mit erzeugenden Funktionen 7.31.

Beispiel 7.33. Die Menge X sei gegeben durch 5 Perlen einer Kette. Eine Perle kann rot, blau oder gar nicht gefärbt sein, das heisst $Y = \{R, B, O\}$. In diesem Beispiel soll die Anzahl der verschiedenen Einfärbungen der Kette bestimmt werden, unter der Bedingung, dass genau 2 rote und mindestens eine blaue Perle vorkommt. Die Anwendung des Abzählssatzes von Polya erfolgt nun in folgenden Schritten:

1. Bestimmung der Menge X

Die Menge $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ist durch 5 Perlen bereits gegeben.

2. Bestimmung der Gruppe G , die auf X operiert

Auf der Kette X operiert die zyklische Gruppe $G = C_5$, die von der Permutation $\sigma = (1, 2, 3, 4, 5)$ erzeugt wird.

3. Bestimmung des Zykeltyps aller Elemente der Gruppe G

	Zykeltyp
$\sigma^0 = (1)(2)(3)(4)(5)$	s_1^5
$\sigma^1 = (1, 2, 3, 4, 5)$	s_5
$\sigma^2 = (1, 3, 5, 2, 4)$	s_5
$\sigma^3 = (1, 4, 2, 5, 3)$	s_5
$\sigma^5 = (1, 5, 4, 3, 2)$	s_5

4. Bestimmung des Zykelindikators

Der Zykelindikator von G ergibt sich daraus zu:

$$Z_G(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5) = \frac{1}{5} \cdot (s_1^5 + 4 \cdot s_5)$$

5. Bestimmung der Gewichtsfunktion der Farben

Die Gewichtsfunktion ist gegeben durch:

$$w(R, B, O) = 1 \cdot R + 1 \cdot B + 1 \cdot O$$

6. Einsetzen der Gewichtsfunktion in den Zykelindikator

In seiner Formulierung mit erzeugenden Funktion besagt der Abzählssatz von Polya, dass die erzeugende Funktion der Muster mit dem Zykelindikator der Gruppe G ausgewertet an den Gewichtsfunktionen der Potenzen der Farben übereinstimmt.

$$\begin{aligned} & Z_G(w(R, B, O), w(R^2, B^2, O^2), w(R^3, B^3, O^3), w(R^4, B^4, O^4), w(R^5, B^5, O^5)) \\ &= \frac{1}{5} (w(R, B, O)^5 + 4 \cdot w(R^5, B^5, O^5)) \\ &= \frac{1}{5} ((R + B + O)^5 + 4 \cdot (R^5 + B^5 + O^5)) \\ &= \frac{1}{5} (5 \cdot R^5 + 5 \cdot R^4 \cdot (B + O) + 10 \cdot R^3 \cdot (B + O)^2 \\ &\quad + 10 \cdot R^2 \cdot (B + O)^3 + 5 \cdot R \cdot (B + O)^4 \\ &\quad + 5 \cdot (B^5 + B^4 \cdot O + 2 \cdot B^3 \cdot O^2 + 2 \cdot B^2 \cdot O^3 + B \cdot O^4 + O^5)) \\ &= R^5 \\ &\quad + R^4 \cdot (B + O) \\ &\quad + 2 \cdot R^3 \cdot (B + O)^2 \\ &\quad + 2 \cdot R^2 \cdot (B + O)^3 \\ &\quad + R \cdot (B + O)^4 \\ &\quad + B^5 + B^4 \cdot O + 2 \cdot B^3 \cdot O^2 + 2 \cdot B^2 \cdot O^3 + B \cdot O^4 + O^5 \end{aligned}$$

7. Auswertung der relevanten Koeffizienten

Relevant sind nur die Koeffizienten von $R^b \cdot B^b \cdot O^o$, wobei $b \geq 1$ und o beliebig

sind.

$$2 \cdot R^2 \cdot (B + O)^3 = R^2 \cdot (2 \cdot B^3 + 6 \cdot B^2 \cdot O + 6 \cdot B \cdot O^2 + 2 \cdot O^3)$$

Es gibt also $2 + 6 + 6 = 14$ verschiedene Muster mit 2 roten und mindestens einer blauen Perle.

Beispiel 7.34. In diesem Beispiel wird die Anzahl der - bis auf Isomorphie - verschiedenen Graphen mit 3 Knoten bestimmt. Genauer gesagt betrachten wir hier ungerichtete Graphen ohne Mehrfachkanten. Allgemein gibt es in einem Graph mit k Knoten $\binom{k}{2}$ mögliche Kanten. Da eine Kante im Graph vorhanden oder nicht vorhanden sein kann, gibt es insgesamt $2^{\binom{k}{2}}$ Graphen, die jedoch auch isomorph sein können. Zwei Graphen heißen dabei isomorph, wenn es eine Permutation der Knoten gibt, die die Kanten erhält. Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass es keinen effizienten Algorithmus gibt, der prüft, ob zwei Graphen isomorph sind. Mehr noch, die Komplexität eines solchen Algorithmus ist bis heute nicht bekannt. Wir wollen hier die Anzahl der Isomorphieklassen bestimmen. Die Anwendung des Abzählssatzes von Polya erfolgt nun in folgenden Schritten:

1. Bestimmung der Menge X

Die Menge X ist die Menge der möglichen Kanten im Graph. Es sind genau $\binom{3}{2} = 3$ Kanten möglich.

2. Bestimmung der Menge Y

Eine Kante aus der Menge X bekommt die Farbe "weiß", wenn die Kante im Graph nicht vorhanden ist, und "schwarz", wenn die Kante im Graph vorhanden ist.

3. Bestimmung der Gruppe G , die auf X operiert

Die symmetrische Gruppe $G = S_3$, die die 3 Knoten permutiert, operiert auch auf der Menge X der möglichen Kanten. Für eine Permutation $\sigma \in S_3$ der Knoten erhält man folgende Abbildung der Kanten:

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow X \\ \{a, b\} &\longmapsto \{\sigma(a), \sigma(b)\} \end{aligned}$$

In der Menge Y^X der Färbungen ergibt sich die Abbildung

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma} : Y^X &\longrightarrow Y^X \\ f &\longmapsto \tilde{\sigma}(f) = \tilde{f}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{f} : X &\longmapsto Y = \{\text{„weiß“}, \text{„schwarz“}\} \\ \{a, b\} &\longmapsto \begin{aligned} \tilde{f}(\{a, b\}) &= \tilde{\sigma}(f)(\{a, b\}) \\ &= f(\{\sigma^{-1}(a), \sigma^{-1}(b)\}) \end{aligned}\end{aligned}$$

Das heisst, dass die Kante im Bild von σ genau dann vorhanden ist, wenn die Kante im Urbild vorhanden ist. Anders ausgedrückt bekommt die Bildkante dieselbe Färbung wie deren Urbild. Die Permutation σ vermittelt also einen Isomorphismus zwischen dem Ursprungs-Graphen und dessen Bild. Betrachten wir nun eine Bahn von G durch $f \in Y^X$ in der Menge der Färbungen:

$$G \circ f = \{ \tilde{\sigma}(f) \mid \sigma \in G \}$$

Dann sind alle Graphen in der Bahn isomorph zueinander. Eine Isomorphieklasse entspricht also einer Bahn von G in der Menge Y^X der Färbungen.

4. Bestimmung des Zykelindikators von G

Der Zykelindikator von $G = S_3$ wurde bereits in Beispiel 7.25 bestimmt:

$$Z(S_3) = \frac{1}{6} (t_1^3 + 3 \cdot t_1 \cdot t_2 + 2 \cdot t_3)$$

5. Bestimmung der Gewichtsfunktion der Farben

Die Gewichtsfunktion ist gegeben durch:

$$w(\text{„weiß“}, \text{„schwarz“}) = 1 + t$$

6. Einsetzen der Gewichtsfunktion in den Zykelindikator

In seiner Formulierung mit erzeugenden Funktion besagt der Abzählssatz von Polya, dass die erzeugende Funktion der Muster mit dem Zykelindikator der Gruppe G

ausgewertet an den Gewichtsfunktionen der Potenzen der Farben übereinstimmt.

$$\begin{aligned}
 Z_G(1+t, 1+t^2, 1+t^3) &= \frac{1}{6} ((1+t)^3 + 3 \cdot (1+t) \cdot (1+t^2) + 2 \cdot (1+t^3)) \\
 &= \frac{1}{6} (1 + 3 \cdot t + 3 \cdot t^2 + t^3 + 3 \cdot (1+t+t^2+t^3) + 2 + 2 \cdot t^3) \\
 &= 1 + t + t^2 + t^3
 \end{aligned}$$

Es gibt also insgesamt 4 verschiedenen Graphen mit 3 Knoten:

0 Kanten	
1 Kante	
2 Kanten	
3 Kanten	

Das Beispiel der Graphen mit 3 Knoten ist einfach nachvollziehbar und das Ergebnis ist wenig überraschend. Die Vorgehensweise soll nun auf Graphen mit 4 Knoten angewendet werden.

Beispiel 7.35. In diesem Beispiel wird die Anzahl der - bis auf Isomorphie - verschiedenen Graphen mit 4 Knoten bestimmt.

1. Bestimmung der Menge X

Die Menge X ist die Menge der möglichen Kanten im Graph. Es sind genau $\binom{4}{2} = 6$ Kanten möglich.

2. Bestimmung der Menge Y

Eine Kante aus der Menge X bekommt die Farbe "weiß", wenn die Kante im Graph vorhanden ist, und "schwarz", wenn die Kante im Graph nicht vorhanden ist.

3. Bestimmung der Gruppe G , die auf X operiert

Die symmetrische Gruppe $G = S_4$, die die 4 Knoten permutiert, operiert auch auf der Menge X der 6 möglichen Kanten. Eine Isomorphieklasse entspricht dabei einer Bahn von G in der Menge Y^X der Färbungen.

4. Bestimmung des Zykelindikators von G

Da die symmetrische Gruppe $G = S_4$ auf den 6 Kanten des Graphen anders operiert

als auf den 6 Seiten eines Würfels aus Beispiel 7.27, wird der Zykelindikator hier neu bestimmt.

- a) Die Identität läßt natürlich alle Knoten und auch die Kanten fest. Der Zykeltyp ist t_1^6 .
- b) Es gibt 6 Vertauschungen von zwei Knoten. Eine solche Vertauschung erhält die Kante dieser zwei Knoten sowie die Kante der übrigen zwei Knoten. Von letzteren gehen jeweils noch 2 Kanten aus, die zyklisch vertauscht werden. Der Zykeltyp ist $t_1^2 \cdot t_2^2$.
- c) Es gibt 8 Permutationen, die einen Knoten fest lassen und die übrigen 3 Knoten zyklisch vertauschen. Die 3 Kanten, die von dem festen Knoten ausgehen, werden dabei ebenfalls zyklisch vertauscht. Ebenso die 3 Kanten, die die vertauschten Knoten verbinden. Der Zykeltyp ist t_3^2 .
- d) Es gibt 3 Möglichkeiten, die 4 Knoten paarweise anzuordnen und die Knoten in den Paaren zu vertauschen. Die Kanten in den Paaren bleiben fest, während die übrigen 2 Kanten zyklisch vertauscht werden. Der Zykeltyp ist $t_1^2 \cdot t_2^2$.
- e) Es gibt 6 zyklische Vertauschungen der Knoten. Dabei werden die 4 Kanten der Knoten des Zyklus vertauscht sowie die zwei übrigen Kanten. Der Zykeltyp ist $t_2 \cdot t_4$.

Damit sind alle $1 + 6 + 8 + 3 + 6 = 24$ Permutationen und ihre Wirkungen auf die Kanten beschrieben. Der Zykelindikator erbigt sich zu:

$$Z_{S_4} = \frac{1}{24} (t_1^6 + 9 \cdot t_1^2 \cdot t_2^2 + 8 \cdot t_3^2 + 6 \cdot t_2 \cdot t_4)$$

5. Bestimmung der Gewichtsfunktion der Farben

Die Gewichtsfunktion ist gegeben durch:

$$w(\text{"weiß"}, \text{"schwarz"}) = 1 + t$$

6. Einsetzen der Gewichtsfunktion in den Zykelindikator

In seiner Formulierung mit erzeugenden Funktion besagt der Abzählssatz von Polya, dass die erzeugende Funktion der Muster mit dem Zykelindikator der Gruppe G

ausgewertet an den Gewichtsfunktionen der Potenzen der Farben übereinstimmt.

$$\begin{aligned}
 & Z_{S_4}(1+t, 1+t^2, 1+t^3, 1+t^4) \\
 &= \frac{1}{24} ((1+t)^6 + 9 \cdot (1+t)^2 \cdot (1+t^2)^2 + 8 \cdot (1+t^3)^2 + 6 \cdot (1+t^2) \cdot (1+t^4)) \\
 &= \frac{1}{24} (1 + 6 \cdot t + 15 \cdot t^2 + 20 \cdot t^3 + 15 \cdot t^4 + 6 \cdot t^5 + t^6) \\
 &\quad + 9 \cdot (1 + 2 \cdot t + t^2 + 2 \cdot t^2 + 4 \cdot t^3 + 2 \cdot t^4 + t^4 + 2 \cdot t^5 + t^6) \\
 &\quad + 8 \cdot (1 + 2 \cdot t^3 + t^6) \\
 &\quad + 6 \cdot (1 + t^2 + t^4 + t^6) \\
 &= 1 + t + 2 \cdot t^2 + 3 \cdot t^3 + 2 \cdot t^4 + t^5 + t^6
 \end{aligned}$$

Es gibt also insgesamt 11 verschiedenen Graphen mit 4 Knoten:

Anzahl Kanten	Anzahl Graphen	
0	1	
1	1	
2	2	
3	3	
4	2	
5	1	
6	1	

Wie in Beispiel 7.34 erwähnt gibt es $2^{\binom{k}{2}}$ Graphen mit k Knoten. Die Anzahl wächst also exponentiell mit $\binom{k}{2}$. Die Anzahl der Isomorphieklassen ist etwa proportional zu $\frac{1}{k!} \cdot 2^{\binom{k}{2}}$. Die genaue Anzahl ist in der Folge A000088 in OEIS verzeichnet. Eine Tabelle der ersten Werte ist im Anhang B aufgeführt.

Beispiel 7.36. In diesem Beispiel soll die Anzahl der verschiedenen Färbungen eines Würfels mit 6 Farben ermittelt werden, bei denen jede Farbe einmal vorkommt.

1. Bestimmung der Menge X

Die Menge $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ist durch 6 Seitenflächen des Würfels gegeben.

2. Bestimmung der Gruppe G , die auf X operiert

Die Drehgruppe des Würfels wurde bereits in Beispiel 7.32 bestimmt.

3. Bestimmung des Zykelindikators

Der Zykelindikator der Würfelgruppe G bezüglich der Wirkung auf die 6 Seiten des Würfels wurde ebenfalls bereits in Beispiel 7.32 bestimmt.

$$Z_G(t_1, t_2, t_3, t_4) = \frac{1}{24} (t_1^6 + 6 \cdot t_1^2 \cdot t_4 + 3 \cdot t_1^2 \cdot t_2^2 + 8 \cdot t_3^2 + 6 \cdot t_2^3)$$

4. Bestimmung der Gewichtsfunktion der Farben

Die Gewichtsfunktion ist gegeben durch:

$$w(F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6) = \sum_{i=1}^6 1 \cdot F_i$$

5. Einsetzen der Gewichtsfunktion in den Zykelindikator

Gemäß der Aufgabenstellung werden beim Einsetzen der Gewichtsfunktion in den Zykelindikator nur Terme mit einfachen Potenzen betrachtet.

$$\begin{aligned} & Z_G(w(F_1, \dots, F_6), w(F_1^2, \dots, F_6^2), w(F_1^3, \dots, F_6^3), w(F_1^4, \dots, F_6^4)) \\ &= \frac{1}{24} ((F_1 + \dots + F_6)^6 + 6 \cdot (F_1 + \dots + F_6)^2 \cdot (F_1^4 + \dots + F_6^4) \\ &\quad + 3 \cdot (F_1 + \dots + F_6)^2 \cdot (F_1^2 + \dots + F_6^2)^2 \\ &\quad + 8 \cdot (F_1^3 + \dots + F_6^3)^2 + 6 \cdot (F_1^2 + \dots + F_6^2)^3) \\ &= \frac{1}{24} ((F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6)^6 + \dots) \\ &= \frac{1}{24} (F_1^6 + 6 \cdot F_1^5 \cdot K_1 + 15 \cdot F_1^4 \cdot K_1^2 + 20 \cdot F_1^3 \cdot K_1^3 \\ &\quad + 15 \cdot F_1^2 \cdot K_1^4 + 6 \cdot F_1 \cdot K_1^5 + K_1^6 + \dots) \\ &\quad \text{mit } K_1 = F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 \\ &= \frac{1}{24} (6 \cdot F_1 \cdot (F_2^5 + 5 \cdot F_2^4 \cdot K_2 + 10 \cdot F_2^3 \cdot K_2^2 + 10 \cdot F_2^2 \cdot K_2^3 + 5 \cdot F_2 \cdot K_2^4 + K_2^5) + \dots) \\ &\quad \text{mit } K_2 = F_3 + F_4 + F_5 + F_6 \\ &= \frac{1}{24} (6 \cdot F_1 \cdot 5 \cdot F_2 \cdot (F_3^4 + 4 \cdot F_3^3 \cdot K_3 + 6 \cdot F_3^2 \cdot K_3^2 + 4 \cdot F_3 \cdot K_3^3 + K_3^4) + \dots) \\ &\quad \text{mit } K_3 = F_4 + F_5 + F_6 \\ &= \frac{1}{24} (30 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot 4 \cdot F_3 \cdot (F_4^3 + 3 \cdot F_4^2 \cdot K_4 + 3 \cdot F_4 \cdot K_4^2 + K_4^3) + \dots) \\ &\quad \text{mit } K_4 = F_5 + F_6 \\ &= \frac{1}{24} (120 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 \cdot 3 \cdot (F_5^2 + 2 \cdot F_5 \cdot F_6 + F_6^2) + \dots) \\ &= \frac{1}{24} (720 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 \cdot F_5 \cdot F_6 + \dots) \\ &= 30 \cdot (F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 \cdot F_5 \cdot F_6) + \dots \end{aligned}$$

Es gibt also 30 verschiedene Muster, bei denen die Seiten eines Würfels mit 6 verschiede-

nen Farben eingefärbt sind.

Dies kann anschaulich nachvollzogen werden. Zunächst wird eine beliebige Seite mit einer beliebigen Farbe eingefärbt. Für die gegenüberliegende Seite stehen dann noch 5 Farben zur Auswahl. Da der Würfel um die Achse durch die Mittelpunkte dieser Seiten gedreht werden kann, kann eine der Seiten mit einer der restlichen 4 Farben eingefärbt werden. Die Farben der restlichen 3 Seiten können dann auf $3! = 6$ Arten vertauscht werden.

Beispiel 7.37. In diesem Beispiel wird die Anzahl unterschiedlicher Alkohole ermittelt. Dies nahm Polya 1937 in seinem Artikel [Pol37] zum Anlass für seine Untersuchungen. Eine gute Beschreibung findet man auch im Buch von Karl-Heinz Zimmermann [Zim22]. Die Alkohole entsprechen ternären Wurzelbäumen. Dabei werden die Kohlenstoffatome als Knoten betrachtet. Das Kohlenstoffatom mit der O-H-Gruppe entspricht der Wurzel. Die Wasserstoffatome werden nicht als Knoten betrachtet sondern als Blätter bezeichnet. Der leere ternäre Wurzelbaum ohne Knoten ist zugelassen. Der ternäre Wurzelbaum mit einem Knoten entspricht dem Methylalkohol und wird als Basis Wurzelbaum bezeichnet.

Ternäre Wurzelbäume können wie folgt rekursiv aufgebaut werden. Sei $\{B_0, B_1, B_2, \dots\}$ eine Menge ternärer Wurzelbäume. Man erhält einen neuen ternären Wurzelbaum, wenn man 3 Wurzelbäume, von denen mindestens einer nicht leer ist, aus dieser Menge auswählt und damit die 3 Blätter des Basis Wurzelbaums ersetzt. Der neue Wurzelbaum hat nun mehr als k Knoten (Kohlenstoffatome). Die Betrachtung verwendet den Abzählssatz von Polya in der Form für erzeugende Funktionen 7.31, der auch für eine beliebige Anzahl von Farben gültig ist.

1. Bestimmung der Menge X

Die 3 Blätter des Basis Wurzelbaumes bilden die Menge $X = \{x_1, x_2, x_3\}$.

2. Bestimmung der Gruppe G , die auf X operiert

Da die Vertauschung der Blätter zu einem isomorphen Wurzelbaum führt, operiert die symmetrische Gruppe S_3 auf der Menge X .

3. Bestimmung des Zykelindikators

Der Zykelindikator der symmetrischen Gruppe S_3 wurde bereits in Beispiel 7.25 bestimmt.

$$Z_{S_3}(t_1, t_2, t_3) = \frac{1}{6} (t_1^3 + 3 \cdot t_1 \cdot t_2 + 2 \cdot t_3)$$

4. Bestimmung der Farben

Die Ersetzung der Blätter des Basis Wurzelbaumes entspricht einer Abbildung aus

der Menge X in die Menge $Y = \{B_1, B_2, \dots\}$ der ternären Wurzelbäume.

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow Y \\ x_1 &\longmapsto B_{x_1} \\ x_2 &\longmapsto B_{x_2} \\ x_3 &\longmapsto B_{x_3} \end{aligned}$$

Zwei Färbungen f_1 und f_2 sind gleichwertig, wenn die Bilder durch eine Permutation aus der symmetrischen Gruppe S_3 auseinander hervorgehen.

5. Funktionalgleichung für die erzeugende Funktion der Wurzelbäume

Die erzeugende Funktion für Wurzelbäume ist

$$w(t) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \cdot t^n$$

Dabei ist w_n die Anzahl der Wurzelbäume mit n Knoten. Wurzelbäume können rekursiv aufgebaut werden, indem die drei Blätter der Wurzel durch Wurzelbäume aus der Menge der vorhandenen Muster ersetzt werden. Der neue Wurzelbaum hat dann einen Knoten (die Wurzel) mehr als die drei angehefteten Bäume zusammen, wobei der Zykelindikator die Permutationen der angehefteten Bäume berücksichtigt. Mit dem Abzählssatz von Polya in der Form für erzeugende Funktionen 7.31 erhalten wir also folgende Funktionalgleichung

$$\begin{aligned} w(t) &= 1 + t \cdot Z_{S_3}(w(t), w(t^2), w(t^3)) \\ &= 1 + \frac{t}{6} (w(t)^3 + 3 \cdot w(t) \cdot w(t^2) + 2 \cdot w(t^3)) \end{aligned}$$

Dabei zählt die 1 die Wurzel und die Funktion nach dem Faktor t die Anzahl der Knoten in den angehefteten Wurzelbäumen.

6. Koeffizientenvergleich

Nun setzen wir die Potenzreihe $w(t) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \cdot t^n$ in die Funktionalgleichung ein und erhalten durch Koeffizientenvergleich die ersten Werte für die Anzahl der

verschiedenen ternären Wurzelbäume mit n Knoten.

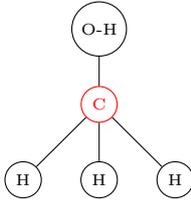
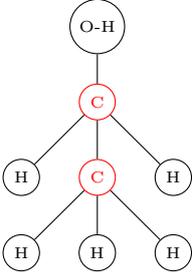
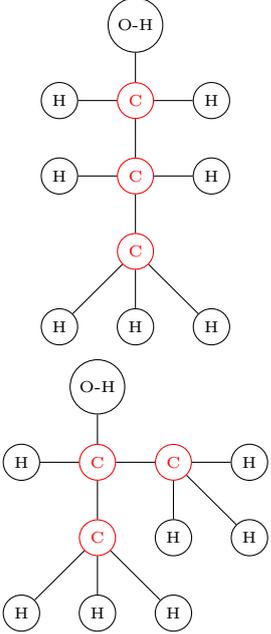
$$\begin{aligned}
 & w_0 + t \cdot w_1 + t^2 \cdot w_2 + t^3 \cdot w_3 + t^4 \cdot w_4 + t^5 \cdot w_5 + t^6 \cdot w_6 + \dots \\
 = & 1 + \frac{1}{6} \cdot (t \cdot (w_0^3 + 3 \cdot w_0^2 \cdot w_1 + 2 \cdot w_0 \cdot w_1^2) \\
 & + t^2 \cdot (3 \cdot w_0^2 \cdot w_1 + 3 \cdot w_0 \cdot w_1^2) \\
 & + t^3 \cdot (3 \cdot w_0 \cdot w_1^2 + 3 \cdot w_0^2 \cdot w_2 + 3 \cdot w_0 \cdot w_1 \cdot w_2 + 3 \cdot w_0 \cdot w_1^2) \\
 & + t^4 \cdot (w_1^3 + 6 \cdot w_0 \cdot w_1 \cdot w_2 + 3 \cdot w_0^2 \cdot w_3 + 3 \cdot w_1^2 + 3 \cdot w_0 \cdot w_3 + 2 \cdot w_1) \\
 & + t^5 \cdot (3 \cdot w_1^2 \cdot w_2 + 3 \cdot w_0 \cdot w_2^2 + 6 \cdot w_0 \cdot w_1 \cdot w_3 + 3 \cdot w_0^2 \cdot w_4 + 3 \cdot w_0 \cdot w_2 \\
 & + 3 \cdot w_1 \cdot w_2 + 3 \cdot w_0 \cdot w_4) \\
 & + t^6 \cdot (3 \cdot w_1 \cdot w_2^2 + 3 \cdot w_1 \cdot w_3 + 6 \cdot w_0 \cdot w_2 \cdot w_3 + 6 \cdot w_0 \cdot w_1 \cdot w_4 \\
 & + 3 \cdot w_0^2 \cdot w_5 + 3 \cdot w_1 \cdot w_2 + 3 \cdot w_1 \cdot w_3 + 3 \cdot w_0 \cdot w_5) \\
 & + \dots)
 \end{aligned}$$

7. Rekursionsformel

Aus obiger Formel kann durch Vergleich der Koeffizienten von t^{n+1} auch eine Rekursionsformel hergeleitet werden. Da der Klammerausdruck auf der rechten Seite mit t multipliziert wird, erhalten wir im ersten Summanden den Koeffizienten von t^n durch Summation aller Kombinationen $t^i \cdot t^j \cdot t^k = t^n$, das heisst aller Kombinationen von $w_i \cdot w_j \cdot w_k$ mit Indizes $i + j + k = n$. Dabei ist jede Reihenfolge extra zu zählen. Im zweiten Summanden sind die Indizes des zweiten Faktors $w(t^2)$ doppelt zu zählen. Und der dritte Summand liefert nur dann einen Beitrag, wenn $3i = n$ ist.

$$\begin{aligned}
 w_0 & = 1 \\
 w_{n+1} & = \frac{1}{6} \cdot \left(\sum_{i+j+k=n} w_i \cdot w_j \cdot w_k + 3 \cdot \sum_{i+2j=n} w_i \cdot w_j + 2 \cdot \sum_{3i=n} w_i \right)
 \end{aligned}$$

8. Tabelle der Alkohole

Anzahl C-Atome	0	1	2	3	4	5	6	...	
Anzahl Alkohole	1	1	1	2	4	8	17	...	
Beispiele									

Die Folge w_n der Anzahlen von ternären Wurzelbäumen mit n Knoten ist in OEIS als Folge A000598 verzeichnet.

A. Tabelle der Fibonacci-Zahlen

In der folgenden Tabelle sind die Abweichungen des Quotienten aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen zum goldenen Schnitt aufgeführt. Zunächst wird die sagemath Prozedur zur Ermittlung der Werte angegeben. Um die Prozedur flexibler zu gestalten, wird die Tabelle komplett in sagemath erstellt und mit sagestr eingebunden.

```
fib = r"\begin{tabular}{| c | c | c | c | c |} \hline "  
fib = fib + r"$n$ & $g_n^{\text{Fib}}$ & $g_{n+1}^{\text{Fib}}$ & "  
fib = fib + r"$\frac{g_{n+1}^{\text{Fib}}}{g_n^{\text{Fib}}}$ & "  
fib = fib + r"$\Phi - \frac{g_{n+1}^{\text{Fib}}}{g_n^{\text{Fib}}}$ \\\ "  
fib = fib + r" \hline"  
phi = (1.0 + sqrt(5.0).n(digits=7))/2.0  
fn = 1  
fn1 = 1  
for k in range(0,15):  
    q = float(fn1) / float(fn)  
    diff = phi - q  
    fib = fib + r" $" + format(k) + r"$ & $" + format(fn) + r"$ & "  
    fib = fib + r" $" + format(fn1) + r"$ & $" + format(q) + r"$ & "  
    fib = fib + r" $" + format(diff) + r"$ \\\ "  
    fib = fib + r" \hline"  
    fn2 = fn + fn1  
    fn = fn1  
    fn1 = fn2  
fib = fib + r" \end{tabular} "
```

n	g_n^{Fib}	g_{n+1}^{Fib}	$\frac{g_{n+1}^{Fib}}{g_n^{Fib}}$	$\Phi - \frac{g_{n+1}^{Fib}}{g_n^{Fib}}$
0	1	1	1.0	0.6180340
1	1	2	2.0	-0.3819660
2	2	3	1.5	0.1180340
3	3	5	1.6666666666666667	-0.04863268
4	5	8	1.6	0.01803400
5	8	13	1.625	-0.006966010
6	13	21	1.6153846153846154	0.002649382
7	21	34	1.619047619047619	-0.001013622
8	34	55	1.6176470588235294	0.0003869385
9	55	89	1.6181818181818182	-0.0001478344
10	89	144	1.6179775280898876	0.00005646050
11	144	233	1.6180555555555556	-0.00002156198
12	233	377	1.6180257510729614	$8.240342e - 6$
13	377	610	1.6180371352785146	$-3.144145e - 6$
14	610	987	1.618032786885246	$1.206994e - 6$

B. Tabelle der Graphen

In der folgenden Tabelle sind die Anzahlen verschiedener Graphen und Isomorphieklassen aufgeführt. Zunächst wird die `sagemath` Prozedur zur Ermittlung der Werte angegeben. Um die Prozedur flexibler zu gestalten, wird die Tabelle komplett in `sagemath` erstellt und mit `sagestr` eingebunden.

```
num_graph = r"\begin{tabular}{| c | r | r |} \hline "  
num_graph = num_graph + r"Anzahl & Anzahl & Anzahl \\ "  
num_graph = num_graph + r"Knoten & Graphen & Isomorphieklassen \\ "  
num_graph = num_graph + r" \hline"  
for k in range(0,10):  
    ng = 2**(binomial(k,2))  
    ni = len(list(graphs(k)))  
    num_graph = num_graph + r" $" + format(k) + r"$ & $"  
    num_graph = num_graph + format(ng, '#,') + r"$ & $"  
    num_graph = num_graph + format(ni, '#,') + r"$ \\ "  
    num_graph = num_graph + r" \hline"  
num_graph = num_graph + r" \end{tabular} "
```

Anzahl Knoten	Anzahl Graphen	Anzahl Isomorphieklassen
0	1	1
1	1	1
2	2	2
3	8	4
4	64	11
5	1,024	34
6	32,768	156
7	2,097,152	1,044
8	268,435,456	12,346
9	68,719,476,736	274,668

C. Notationen

$\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, \dots \}$...	natürliche Zahlen inclusive 0
$\mathbb{N}^+ = \{ 1, 2, \dots \}$...	natürliche Zahlen ohne 0
$[n] = \{ 1, 2, \dots, n \}$...	natürliche Zahlen bis n
$[0] = \emptyset$		
\mathbb{P}	...	Menge der Primzahlen
$ A \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$...	Ordnung, Anzahl der Elemente in der Menge A
$ [n] = n$		
$\mathbb{Z}[[t]]$...	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Menge der formalen Potenzreihen } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n \\ \text{mit Koeffizienten } a_n \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$
$Map(A, B)$ $= \{ f : A \rightarrow B \mid f \text{ Funktion} \}$...	Menge der Abbildungen zwischen den Mengen A und B
$\mathcal{P}(A)$...	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Menge aller Teilmengen der Menge } A \\ \text{Potenzmenge} \end{array} \right.$
$\mathcal{P}_k(A)$ $= \{ B \subseteq A \mid B = k \}$...	Menge aller k -elementigen Teilmengen der Menge A
$\hat{\mathcal{P}}(X) = Map(X, \mathbb{N})$...	Menge aller Multimengen von X
$\hat{\mathcal{P}}_k(X)$ $= \left\{ \begin{array}{l} \chi : X \rightarrow \mathbb{N} \mid \\ \sum_{x \in X} \chi(x) = k \end{array} \right\}$...	Menge aller k -Multimengen von X

Literaturverzeichnis

- [dB71] Nicolaas Govert de Bruijn. Pólyas abzähl-theorie: Muster für graphen und chemische verbindungen. *Heidelberger Taschenbücher*, 86, 1971.
- [Pol37] George Polya. Kombinatorische anzahlbestimmungen für gruppen, graphen und chemische verbindungen. 1937.
- [Sta08] Richard P Stanley. Catalan addendum, 2008.
- [Sta11] Richard P Stanley. Enumerative combinatorics volume 1 second edition. *Cambridge studies in advanced mathematics*, 2011.
- [Wag20] Carl G Wagner. *A First Course in Enumerative Combinatorics*, volume 49. American Mathematical Soc., 2020.
- [Wil] H Wilf. Generatingfunctionology. 1994.
- [Zim22] Karl-Heinz Zimmermann. *Abzähltheorie nach Polya*. Springer, 2022.