

# Spezielle Funktionen

Stephan Klaus

Vorlesung Winter Semester 2023-24

Skript: Wolfgang Schwarz

Aus dem Grundstudium kennt man die Eulersche Gamma-Funktion und sicher hat jeder schon etwas von der Riemannschen Zeta-Funktion gehört. Dies sind Beispiele für spezielle Funktionen, d.h. Funktionen aus der reellen oder komplexen Analysis, die über die klassischen Funktionen hinausgehen (also keine Polynome, rationale Funktionen, Wurzelfunktionen, Exponential- und Logarithmus-Funktion, trigonometrische Funktionen und ihre hyperbolischen und inversen Verwandte). Sie haben eine besondere Bedeutung in vielen Bereichen der theoretischen und angewandten Mathematik und sind daher sehr interessant.

Wir wollen in der Vorlesung weitere Vertreter dieser speziellen Funktionen behandeln, z.B. verwandte Funktionen zur Gamma-Funktion wie die Eulersche Beta-Funktion, die Zeta-Funktion und ihre Varianten, Hypergeometrische Funktionen, Polylogarithmen, elliptische Funktionen, Bessel- und Hankel-Funktionen ... Dabei sollen auch einige Zusammenhänge zu anderen Gebieten angesprochen werden (z.B. Zahlentheorie, Differentialgleichungen, mathematische Physik). Die Vorlesung wird eine übersichtsartige Einführung in das Gebiet der speziellen Funktionen geben.

## Inhaltsverzeichnis

|          |  |          |
|----------|--|----------|
| <b>1</b> | <b>Gamma-Funktion</b>                            | <b>4</b> |
| 1.1      | Eigenschaften der Gamma-Funktion . . . . .       | 6        |
| 1.2      | Eulersche Beta-Funktion . . . . .                | 10       |
| 1.3      | Produkt-Darstellung der Gamma-Funktion . . . . . | 11       |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 1.4      | Unendliche Produkte . . . . .   | 12        |
| 1.5      | Weierstraßscher Produktsatz . . . . .   | 14        |
| 1.6      | Die Eulersche $\gamma$ -Konstante . . . . .   | 16        |
| 1.7      | Weierstraßsche Produktdarstellung der Gamma-Funktion . . . . .                      | 18        |
| 1.8      | Eulersche Spiegelungsformel . . . . .   | 20        |
| 1.9      | Legendresche Verdoppelungsformel . . . . .  | 21        |
| 1.10     | Die Digamma-Funktion . . . . .  | 23        |
| <b>2</b> | <b>Zeta-Funktion</b>  | <b>25</b> |
| 2.1      | Dirichlet-Reihen . . . . .  | 26        |
| 2.1.1    | Eulersche Produktformel . . . . .   | 27        |
| 2.1.2    | Reziproke Zeta-Funktion . . . . .   | 30        |
| 2.1.3    | Ableitung von Dirichlet-Reihen . . . . .  | 32        |
| 2.2      | Bernoulli-Zahlen . . . . .  | 34        |
| 2.3      | Dirichletsche Eta-Funktion . . . . .  | 38        |
| 2.4      | Mellin-Transformation . . . . .   | 39        |
| 2.5      | Funktionalgleichung der Zeta-Funktion . . . . .                                     | 40        |
| 2.6      | Laurent-Entwicklung der Zeta-Funktion . . . . .                                     | 46        |
| 2.7      | Nullstellen der Zeta-Funktion . . . . .   | 47        |
| 2.8      | Primzahlverteilung . . . . .  | 48        |
| <b>3</b> | <b>Elliptische Funktionen</b>   | <b>53</b> |
| 3.1      | Liouvillesche Sätze . . . . .   | 58        |
| 3.2      | Eisenstein-Reihen . . . . .   | 63        |
| 3.3      | Differentialgleichung für die Weierstraßsche $\wp$ -Funktion . . . . .              | 65        |
| 3.4      | Halbwerte der Weierstraßschen $\wp$ -Funktion . . . . .                             | 72        |
| 3.5      | Namensgebung elliptische Funktionen . . . . .                                       | 74        |
| <b>4</b> | <b>Gewöhnliche Differentialgleichungen</b>  | <b>75</b> |
| 4.1      | Lineare Differentialgleichung der Ordnung $r$ . . . . .                             | 76        |
| 4.2      | Lineares Differentialgleichungssystem der Ordnung 1 . . . . .                       | 76        |
| 4.3      | Satz von Picard-Lindelöf . . . . .  | 79        |
| 4.4      | Lösung einer linearen Differentialgleichung der Ordnung 1 . . . . .                 | 80        |
| 4.5      | Lösung eines linearen, homogenen Differentialgleichungssystems 1. Ordnung . . . . . | 81        |
| <b>5</b> | <b>Hypergeometrische Funktionen</b>   | <b>87</b> |
| 5.1      | Konvergenz von Hypergeometrischen Funktionen . . . . .                              | 89        |
| 5.2      | Hypergeometrische Differentialgleichung . . . . .                                   | 90        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 5.3      | Gaußsche Hypergeometrische Funktionen . . . . .                                       | 92         |
| 5.4      | Konfluente hypergeometrische Funktionen . . . . .                                     | 100        |
| <b>6</b> | <b>Bessel- und Zylinder-Funktionen</b>  | <b>101</b> |
| 6.1      | Schwingungsgleichung einer kreisrunden Membran . . . . .                              | 102        |
| 6.1.1    | Herleitung der Schwingungsgleichung . . . . .   | 103        |
| 6.2      | Lösung durch Trennung der Variablen . . . . .   | 104        |
| 6.3      | Laplace-Operator in Polar-Koordinaten . . . . .                                       | 105        |
| 6.4      | Bessel-Funktionen 1. Art . . . . .  | 107        |
| 6.5      | Bessel-Funktionen 2. Art . . . . .  | 115        |
| 6.6      | Bessel-Funktionen 3. Art . . . . .  | 116        |
| <b>7</b> | <b>Lambertsche W-Funktion</b>   | <b>117</b> |
| 7.1      | Herleitung der Lambertschen W-Funktion . . . . .                                      | 118        |
| 7.2      | Eigenschaften der Lambertschen W-Funktion . . . . .                                   | 120        |
| 7.3      | Komposition von Potenzreihen . . . . .  | 121        |
| 7.4      | Umkehrfunktion einer holomorphen Funktion . . . . .                                   | 122        |
| 7.5      | Lösungen einiger transzendenter Gleichungen mit der Lambertschen W-Funktion . . . . . | 123        |
| <b>8</b> | <b>Die j-Funktion</b>   | <b>125</b> |
| 8.1      | Modulgruppe . . . . .   | 126        |
| 8.2      | Monstrous Moonshine . . . . .   | 130        |

# 1 Gamma-Funktion

Diese Funktion setzt die Fakultät-Funktion der natürlichen Zahlen auf reelle, ja sogar komplexe Zahlen fort. Zur Erinnerung hier die rekursive Definition der Fakultät:

$$\begin{aligned} 0! &= 1 \\ n! &= n(n-1)! \end{aligned}$$

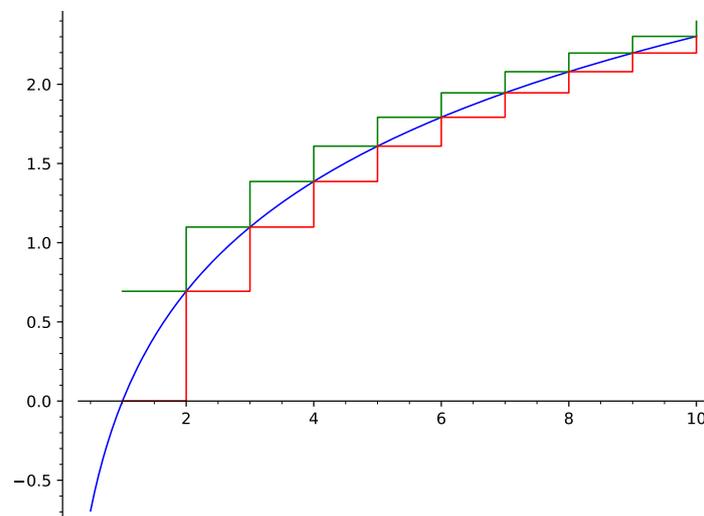
**Proposition 1.1.** *Das Wachstum der Fakultät wird durch die Stirlingsche Näherungsformel beschrieben. Diese wurde von James Stirling im Jahr 1730 mit einer Reihenentwicklung angegeben. Die Abschätzung der Restkonstante, die zu der endgültigen Form führte, erfolgte erst später.*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Dabei ist  $\sim$  die asymptotische Gleichheit. Zwei Funktion  $f(x)$  und  $g(x)$  sind asymptotisch gleich, wenn gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 1 \quad f(x) \neq 0 \text{ für große } x$$

*Beweis.* Der Beweis soll hier nur skizziert werden. Wir betrachten Abschätzungen der Logarithmus Funktion, zunächst eine Abschätzung durch eine Treppenfunktion (grün) oberhalb der Logarithmus Funktion.



$$\begin{aligned}
\ln(n!) &= \sum_{k=1}^n \ln(k) \\
&> \int_1^n \ln(x) dx \\
&= (\ln(x)x - x) \Big|_1^n \\
&= \ln(n)n - n + 1 \\
\Rightarrow n! &> e^{\ln(n)n - n + 1} \\
&= n^n \cdot e^{-n} \cdot e \\
&= e\left(\frac{n}{e}\right)^n
\end{aligned}$$

Analog erhalten wir eine Abschätzung durch eine Treppenfunktion (rot) unterhalb der Logarithmus Funktion.

$$\begin{aligned}
\ln((n-1)!) &= \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) \\
&< \int_1^n \ln(x) dx \\
&= (\ln(x)x - x) \Big|_1^n \\
&= \ln(n)n - n + 1 \\
\Rightarrow (n-1)! &< e\left(\frac{n}{e}\right)^n \\
n! &< ne\left(\frac{n}{e}\right)^n
\end{aligned}$$

Damit liegt die Fakultät zwischen folgenden Grenzen:

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < ne\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Wenn an Stelle der Treppenfunktionen eine stückweise lineare Approximation für die Logarithmus Funktion betrachtet wird, ergibt sich eine Näherung mit dem geometrischen Mittel der beiden Grenzen:

$$n! \approx \sqrt{n} e\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

□

### **Definition 1.2.** Eulersche Integral-Darstellung der Gamma-Funktion

Für  $x \in \mathbb{R}^+$  ist die Gamma-Funktion definiert durch

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (\Gamma \text{ Integral})$$

Das uneigentliche Integral existiert. Die obere Grenze  $\infty$  ist unkritisch wegen der

Dämpfung  $e^{-t}$ . An der unteren Grenze 0 betrachten wir

$$\begin{aligned}\int_{\epsilon}^1 t^s ds &= \frac{1}{s+1} t^{s+1} \Big|_{\epsilon}^1 \\ &= \frac{1}{s+1} (1 - \epsilon) \\ &\rightarrow \frac{1}{s+1} \quad \text{für } \epsilon \rightarrow 0\end{aligned}$$

Für  $x \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(x) > 0$  existiert das Integral ebenso. Also ist die Gamma-Funktion als komplexe Funktion holomorph.

## 1.1 Eigenschaften der Gamma-Funktion

Für die Formulierung einer Eigenschaft der Gamma-Funktion benötigen wir den Begriff der Konvexität.

**Definition 1.3.** Eine Funktion  $f$  heisst konvex, wenn ihr Graph stets unterhalb einer Verbindungsstrecke von zwei Punkten verläuft. Das heisst, für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt

$$f(\lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y) < \lambda \cdot f(x) + (1 - \lambda) \cdot f(y) \quad \text{für alle } \lambda \in ]0, 1[$$

Eine Funktion  $f$  heisst logarithmisch konvex, wenn die Funktion  $\ln \circ f$  konvex ist.

$$\begin{aligned}\ln \circ f(\lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y) &< \ln(\lambda \cdot f(x) + (1 - \lambda) \cdot f(y)) \\ f(\lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y) &< e^{\ln(\lambda \cdot f(x) + (1 - \lambda) \cdot f(y))} \\ &< f(x)^{\lambda} \cdot f(y)^{(1 - \lambda)}\end{aligned}$$

**Theorem 1.4.** Die Gamma-Funktion hat folgende wichtige Eigenschaften:

$$a) \quad \Gamma(1) = 1 \quad (\Gamma 1)$$

$$b) \quad \Gamma(x + 1) = x \cdot \Gamma(x) \quad (\Gamma 2)$$

c) Die Gamma-Funktion  $\Gamma$  ist auf  $\mathbb{R}^+$  logarithmisch konvex.

*Beweis.* ad a) Diese Eigenschaft folgt direkt aus der Definition.

ad b) Diese Eigenschaft beweisen wir durch partielle Integration.

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^\infty \underbrace{t^x}_{=f} \underbrace{e^{-t}}_{=g'} dt \\ &= t^x (-e^{-t}) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty x t^{x-1} (-e^{-t}) dt \\ &= x \cdot \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \\ &= x \cdot \Gamma(x) \end{aligned}$$

ad c) Hier wenden wir die Höldersche Ungleichung an.

$$\int_a^b f(t)g(t) dt \leq \left( \int_a^b (f(t))^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \int_a^b (g(t))^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{für } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Mit  $p = \frac{1}{\lambda}$  und  $q = \frac{1}{(1-\lambda)}$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \int_0^\infty \underbrace{t^{\frac{x-1}{p}} e^{-\frac{t}{p}}}_{=f} \underbrace{t^{\frac{y-1}{q}} e^{-\frac{t}{q}}}_{=g} dt \\ &\leq \left( \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \int_0^\infty t^{y-1} e^{-t} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \Gamma(x)^\lambda \cdot \Gamma(y)^{(1-\lambda)} \end{aligned}$$

□

Wenn die Eigenschaft b) mehrfach angewendet wird, genügt es, die Werte der Gamma-Funktion im Intervall  $]0, 1[$  zu kennen. Die anderen Werte ergeben sich aus

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1) \cdots (x+1) \cdot x \cdot \Gamma(x)$$

Dies kann mit Hilfe des Pochhammer-Symbols einfacher geschrieben werden.

**Definition 1.5.** Pochhammer-Symbol

Sei  $R$  ein kommutativer Ring und  $x \in R$  sowie  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist das Pochhammer-Symbol definiert durch

$$(x)_n = x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdots (x+n-1)$$

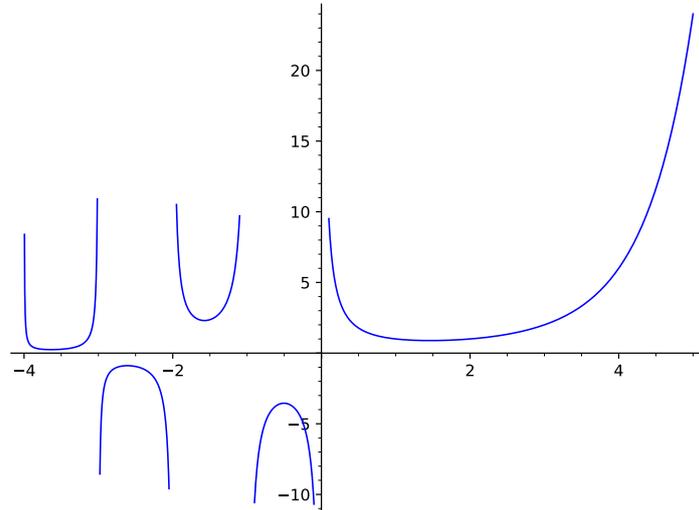
Das Pochhammer-Symbol  $(x)_n$  ist ein Polynom vom Grad  $n$  im Polynomring von  $R$  mit den Nullstellen  $0, -1, -2, \dots$ . Insbesondere gilt

$$(1)_n = n!$$

Mit Hilfe von

$$\Gamma(x+n) = (x)_n \cdot \Gamma(x)$$

kann die Gamma-Funktion für alle  $x \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$  definiert werden. Die Gamma-Funktion ist auf den komplexen Zahlen eine meromorphe Funktion mit einfachen Polen in  $x \in -\mathbb{N}$  ohne Nullstellen.



**Theorem 1.6.** Bohr-Møllerup, 1922

Eine Funktion

$$F : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

mit den Eigenschaften aus Theorem 1.4 ist notwendig die Gamma-Funktion.

*Beweis.* Aus der zweiten Eigenschaft folgt

$$F(x+n) = (x)_n \cdot F(x)$$

Die Funktion  $F$  ist also festgelegt durch ihre Werte im Intervall  $]0, 1[$ . Mit  $x = 1$  und den ersten beiden Eigenschaften erhalten wir

$$\begin{aligned} F(n) &= \frac{1}{n} F(1+n) \\ &= \frac{1}{n} (1)_n F(1) \\ &= \frac{1}{n} n! \\ &= (n-1)! \end{aligned}$$

Aus der logarithmischen Konvexität erhalten wir mit  $n + x = (1 - x)n + x(n + 1)$  für  $x \in ]0, 1[$

$$\begin{aligned} F(n + x) &\leq F(n)^{1-x} \cdot \underbrace{F(n + 1)^x}_{F(n)^{xn}} \\ &= F(n) \cdot n^x \\ &= (n - 1)! \cdot n^x \end{aligned}$$

Analog erhalten wir mit  $n + 1 = x(n + x) + (1 - x)(n + 1 + x)$  für  $x \in ]0, 1[$

$$\begin{aligned} F(n + 1) &\leq F(n + x)^x \cdot F(n + 1 + x)^{1-x} \\ n! &\leq F(n + x) \cdot (n + x)^{1-x} \end{aligned}$$

Zusammen genommen ergibt sich eine obere und untere Grenze für  $F(x)$ .

$$\begin{aligned} n! \cdot (n + x)^{x-1} \leq F(n + x) \leq (n - 1)! \cdot n^x \\ \frac{n! \cdot (n + x)^{x-1}}{(x)_n} \leq F(x) \leq \frac{(n - 1)! \cdot n^x}{(x)_n} \end{aligned}$$

Der Quotient der beiden Grenzen strebt gegen 1 für  $n \rightarrow \infty$ .

$$\begin{aligned} \frac{\frac{(n-1)! \cdot n^x}{(x)_n}}{\frac{n! \cdot (n+x)^{x-1}}{(x)_n}} &= \frac{(n - 1)! \cdot n^x}{n! \cdot (n + x)^{x-1}} \\ &= \frac{n^x}{n \cdot (n + x)^{x-1}} \\ &= \left(\frac{n + x}{n}\right)^{1-x} \\ &= \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{1-x} \end{aligned}$$

Somit gilt

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n - 1)! \cdot n^x}{(x)_n}$$

Da dies insbesondere auch für die Gamma-Funktion gilt, muss  $F$  mit der Gamma-Funktion übereinstimmen. □

In der Literatur findet man häufig folgende Gaußsche Limes-Darstellung für die Gamma-Funktion:

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot n^x}{x(x + 1)(x + 2) \cdots (x + n - 1)(x + n)} \quad (\Gamma \text{ Limes})$$

Diese ergibt sich aus der Limes-Formel im Beweis durch Erweiterung mit  $\frac{n}{x+n} \rightarrow 1$ .

## 1.2 Eulersche Beta-Funktion

Die Gamma-Funktion steht in enger Beziehung zur Eulerschen Beta-Funktion.

**Definition 1.7.** Die Eulersche Beta-Funktion ist in der komplexen Ebene definiert durch

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad \text{für } \operatorname{Re}(x) > 0, \operatorname{Re}(y) > 0$$

Die Eulersche Beta-Funktion ist symmetrisch:

$$B(x, y) = B(y, x)$$

Durch die Substitution

$$\begin{aligned} u &= \frac{t}{1-t} \\ t &= \frac{u}{1+u} \\ \frac{dt}{du} &= \frac{1}{(1+u)^2} \end{aligned}$$

erhält man die Darstellung:

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \\ &= \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x-1}} \frac{1}{(1+u)^{y-1}} \frac{du}{(1+u)^2} \\ &= \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du \end{aligned}$$

**Theorem 1.8.** Die Eulersche Beta-Funktion berechnet sich aus der Gamma-Funktion durch folgende Formel.

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \cdot \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

*Beweis.* Das Produkt der Gamma-Funktionen schreiben wir als:

$$\begin{aligned} \Gamma(x) \cdot \Gamma(y) &= \int_{s=0}^\infty s^{x-1} e^{-s} ds \cdot \int_{t=0}^\infty t^{y-1} e^{-t} dt \\ &= \int_{s=0}^\infty \int_{t=0}^\infty e^{-s-t} s^{x-1} t^{y-1} \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

Zunächst substituieren wir  $s$  durch  $u$  wie folgt:

$$\begin{aligned} -(s+t) &= -t(1+u) \\ s &= tu \\ ds &= tdu \\ \frac{ds}{s} &= \frac{tdu}{tu} = \frac{du}{u} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\Gamma(x) \cdot \Gamma(y) = \int_{u=0}^{\infty} \int_{t=0}^{\infty} e^{-t(1+u)} u^x t^{x+y} \frac{du}{u} \frac{dt}{t}$$

Mit einer zweiten Substitution  $t$  durch  $v$

$$\begin{aligned} v &= t(1+u) \\ dv &= dt(1+u) \\ \frac{dt}{t} &= \frac{dv}{1+u} \frac{1+u}{v} = \frac{dv}{v} \end{aligned}$$

ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} \Gamma(x) \cdot \Gamma(y) &= \int_{v=0}^{\infty} e^{-v} v^{x+y} \frac{dv}{v} \cdot \int_{u=0}^{\infty} u^x \left(\frac{1}{1+u}\right)^{x+y} \frac{du}{u} \\ &= \Gamma(x+y) \cdot B(x, y) \end{aligned}$$

□

### 1.3 Produkt-Darstellung der Gamma-Funktion

**Theorem 1.9.** Die Gamma-Funktion läßt sich für  $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$  wie folgt als unendliches Produkt schreiben:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^z \cdot \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} \quad (\Gamma\text{-Produkt})$$

*Beweis.* Wir gehen von der Gaußschen Limes-Darstellung ( $\Gamma$  Limes) für die Gamma-Funktion aus und setzen für  $n > 2$  das Teleskop-Produkt ein:

$$\begin{aligned} n &= \frac{n}{n-1} \frac{n-1}{n-2} \cdots \frac{2}{1} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n-2}\right) \cdots (1+1) \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right) \end{aligned}$$

Den Kehrwert von  $\frac{(n-1)!}{(z)_n}$  schreiben wir wie folgt als Produkt:

$$\begin{aligned} \frac{(z)_n}{(n-1)!} &= z \cdot \frac{(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)} \\ &= z \cdot (1+z) \cdot \left(1 + \frac{z}{2}\right) \cdots \left(1 + \frac{z}{n-1}\right) \\ &= z \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{z}{k}\right) \end{aligned}$$

Diese beiden Formeln eingesetzt ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! n^z}{(z)_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^z \cdot \frac{1}{z} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1} \right) \\ &= \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^z \cdot \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} \end{aligned}$$

□

## 1.4 Unendliche Produkte

Wir betrachten nun unendliche Produkte und ihre Eigenschaften, insbesondere die Konvergenz.

**Definition 1.10.** Sei  $w_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  eine Folge komplexer Zahlen. Das unendliche Produkt

$$\prod_{n=0}^{\infty} w_n$$

konvergiert genau dann gegen  $p$ , wenn die Teilprodukte  $p_N = \prod_{n=0}^N w_n$  gegen  $p$  konvergieren.

Ein notwendiges Kriterium für die Konvergenz ist, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 1$  gilt. Das ergibt sich aus

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{p_N}{p_{N-1}} \\ &\rightarrow \frac{p}{p} = 1 \quad \text{für } N \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Logarithmus-Funktion

$$\begin{aligned} \ln : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^- &\longrightarrow \mathbb{C} \\ r \cdot e^{i\theta} &\longmapsto \ln r + i \cdot \theta \quad -\pi < \theta < \pi \end{aligned}$$

kann das folgende Logarithmus-Kriterium für die Konvergenz von unendlichen Produkten formuliert werden.

**Proposition 1.11.** *Das unendliche Produkt  $\prod_{n=0}^{\infty} w_n$  ist genau dann konvergent, wenn die Summe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \ln(w_n)$$

*konvergiert.*

Wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 1$  sind höchstens endlich viele  $w_n \in \mathbb{R}_0^-$ . Diese können bei der Summenbildung weggelassen werden.

**Definition 1.12.** Das unendliche Produkt

$$\prod_{n=0}^{\infty} w_n$$

heißt absolut konvergent, wenn die Summe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \ln(w_n)$$

absolut konvergiert.

**Lemma 1.13.** *Das unendliche Produkt*

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + a_n)$$

*ist genau dann absolut konvergent, wenn*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

*absolut konvergiert.*

## 1.5 Weierstraßscher Produktsatz

Zu endlich vielen vorgegebenen komplexen Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$  gibt es immer ein Polynom  $f(z)$  mit  $f(a_i) = 0$ .

$$\begin{aligned} f(z) &= \prod_{i=1}^n (z - a_i) \\ &= (-1)^n a_1 a_2 \cdots a_n \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{z}{a_i}\right) \end{aligned}$$

Diese Konstruktion konvergiert im allgemeinen nicht für unendlich viele vorgegebene Nullstellen. Der Weierstraßsche Produktsatz sagt aus, unter welchen Bedingungen eine holomorphe Funktion mit unendlich vielen vorgegebenen Nullstellen existiert.

### Theorem 1.14. Weierstraßscher Produktsatz

Sei  $a_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  eine divergente Folge komplexer Zahlen. Dann gibt es eine holomorphe Funktion  $h(z)$  ohne Nullstellen, eine natürliche Zahl  $m \in \mathbb{N}$  sowie natürliche Zahlen  $m_n \in \mathbb{N}$  und komplexe Polynome  $g_n(z)$ , so dass

$$f(z) = h(z) \cdot z^m \cdot \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_i}\right) e^{g_n(z)}$$

eine holomorphe Funktion ist mit den Nullstellen  $a_n$ . Die Polynome  $g_n(z)$  sind gegeben durch

$$g_n(z) = \frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{m_n} \left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n}$$

Mehrfache Nullstellen sind möglich, wenn mehrere  $a_i$  zusammenfallen. Als wichtige Folgerung ergibt sich daraus das folgende Korollar.

**Korollar 1.15.** Der Körper der meromorphen Funktionen auf  $\mathbb{C}$  ist der Quotientenkörper des Ringes der holomorphen Funktionen auf  $\mathbb{C}$ .

**Beispiel 1.16.** Die Funktion  $\sin(\pi z)$  ist eine ganze Funktion mit Nullstellen für alle  $z \in \mathbb{Z}$ . Bekanntermaßen läßt sich diese Funktion wie folgt als unendliches Produkt darstellen:

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

Für die konvergenz-erzeugenden Faktoren gilt  $e^{g_n(z)} = 1$ , da  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  konvergiert. Wir ver-

gleichem nun dieses Ergebnis mit der bekannten Reihenentwicklung der Sinus-Funktion.

$$\begin{aligned}\sin(\pi z) &= \pi z - \frac{1}{3!} (\pi z)^3 + \frac{1}{5!} (\pi z)^5 \mp \dots \\ \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} &= 1 - \frac{1}{3!} (\pi z)^2 + \frac{1}{5!} (\pi z)^4 \mp \dots\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich mit

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) &= \left(1 - \frac{z^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{3^2}\right)\dots \\ &= 1 - z^2 \underbrace{\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots\right)}_{=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \\ &\quad + z^4 \left(\sum_{n < m} \frac{1}{n^2 m^2}\right) \\ &\quad - z^6 \left(\sum_{n < m < k} \frac{1}{n^2 m^2 k^2}\right) \pm \dots\end{aligned}$$

erhalten wir als erstes den Grenzwert der Summe der reziproken Quadrate

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Euler fand diesen Wert 1731 und löste damit das von Jakob Bernoulli 1689 formulierte als Baseler Problem bekannte Problem, an dem sich seit 1650 einige berühmte Mathematiker unter anderen auch Leibniz vergeblich versucht hatten.

Vergleiche der weiteren Koeffizienten liefern:

$$\sum_{n < m} \frac{1}{n^2 m^2} = \frac{\pi^4}{120}$$

Allgemein

$$\sum_{n_1 < n_2 < \dots < n_k} \frac{1}{n_1^2 n_2^2 \dots n_k^2} = \frac{\pi^{2k}}{(2k + 1)!}$$

Definiert man die multiple Zeta-Funktion durch

$$\zeta(s_1, s_2, \dots, s_k) = \sum_{n_1 < n_2 < \dots < n_k} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \dots n_k^{s_k}}$$

so gilt

$$\zeta(2, 2, \dots, 2) = \frac{\pi^{2k}}{(2k + 1)!}$$

## 1.6 Die Eulersche $\gamma$ -Konstante

Wir untersuchen nun weitere Darstellungen und Eigenschaften der Gamma-Funktion. Dabei spielt die Eulersche  $\gamma$ -Konstante eine wichtige Rolle.

**Definition 1.17.** Die harmonischen Zahlen  $H_n$  sind definiert durch endliche Summen der harmonischen Reihe.

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \in \mathbb{Q}^+$$

Die Eulersche  $\gamma$ -Konstante ist definiert durch den Grenzwert

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - \ln(n+1)) \quad (\gamma)$$

Die harmonische Reihe divergiert, allerdings sehr langsam. Die ersten Werte der harmonischen Zahlen sind:

|       |   |     |      |       |        |       |         |     |
|-------|---|-----|------|-------|--------|-------|---------|-----|
| n     | 1 | 2   | 3    | 4     | 5      | 6     | 7       | ... |
| $H_n$ | 1 | 3/2 | 11/6 | 25/12 | 137/60 | 49/20 | 363/140 | ... |

Der Vollständigkeit halber geben wir noch die erzeugende Funktion der harmonischen Zahlen an.

$$\sum_{n=1}^{\infty} H_n z^n = -\frac{\ln(1-z)}{1-z}$$

**Bemerkung 1.18.** Die Divergenz der harmonischen Reihe wirft die Frage auf, welche Ausdünnung der beteiligten Summanden auf Konvergenz führt. Die harmonische Reihe ist auch noch divergent, wenn nur die Kehrwerte der Primzahlen aufsummiert werden. Daraus kann gefolgert werden, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

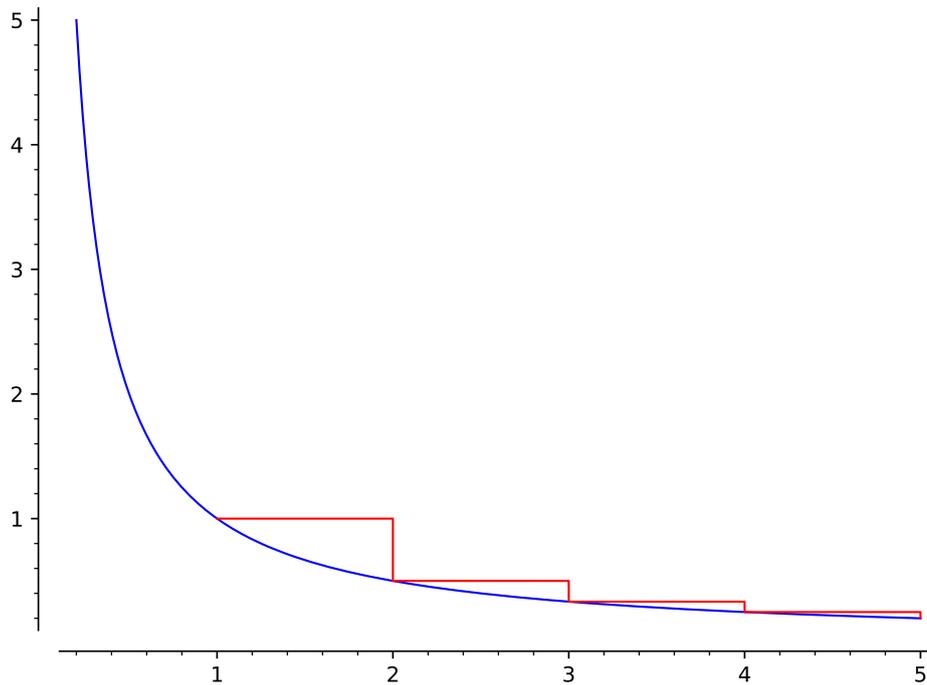
Die Einschränkung auf Primzahlzwillinge ist jedoch konvergent, wie Viggo Brun 1919 beweisen konnte. Der Wert wird als Brunsche Konstante bezeichnet, ist jedoch nicht genau bekannt. Da die Summe der Kehrwerte der Primzahlzwillinge konvergiert, kann man daraus keine Aussage darüber ableiten, ob es endlich viele oder unendlich viele Primzahlzwillinge gibt. Die Primzahlzwillingsvermutung ist bis heute nicht bewiesen.

Thomas Nicely gab 1994 mit 1,902 160 582... eine Abschätzung für die Brunsche Konstante an und erlangte große Aufmerksamkeit mit der Entdeckung, dass der Gleitkomma Chip des damals aktuellen Pentium Prozessors den Wert von 1/824 633 702 441 inkorrekt berechnete. Der zugehörige Primzahlzwilling ist 824 633 702 443.

Zum Nachweis der Konvergenz von  $\gamma$  wird verwendet, dass die harmonischen Zahlen

das Integral der Treppenfunktion  $\frac{1}{k}$  für  $1 \leq k \leq n$  sind.

$$\begin{aligned} H_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx \\ &> \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \\ &= \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx \end{aligned}$$



Für

$$H_n - \ln(n+1) = \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{x} \right) dx$$

berechnet man mit der Abschätzung

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} - \frac{1}{x} &= \frac{x-k}{xk} \\ &\leq \frac{1}{k^2} \quad \text{für } k \leq x \leq k+1 \end{aligned}$$

und erhält

$$H_n - \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

Damit ist die Konvergenz von  $\gamma$  gesichert. Die ersten 30 Nachkommastellen von  $\gamma$  lauten:

$$\gamma = 0.577215664901532860606512090082\dots$$

Obwohl mit Stand vom September 2023 über 1.337.000.000.000 dezimale Nachkommastellen bekannt sind, weiss man bis heute nicht, ob  $\gamma$  tatsächlich irrational ist.

**Bemerkung 1.19.** Die Eulersche  $\gamma$ -Konstante ergibt sich als Grenzwert der Differenz von zwei divergenten Ausdrücken, nämlich der Harmonischen Reihe und dem Integral

$$\int_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n)$$

In Definition ( $\gamma$ ) kann  $\ln(n+1)$  auch durch die Teleskopsumme ersetzt werden und man erhält

$$\begin{aligned} \gamma &= \lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - \ln(n+1)) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} - \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \right) \end{aligned}$$

Da  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln(n+1) - \ln(n)) = 0$  gilt, kann in Definition  $\gamma$  daher ebensogut  $\ln(n)$  anstelle von  $\ln(n+1)$  verwendet werden.

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - \ln(n)) \quad (\gamma 1)$$

Die Definition von  $\gamma$  in ( $\gamma$ ) hat Euler in seiner Abhandlung "De Progressionibus harmonicis observationes" bereits im Jahre 1740 aufgestellt und für eine erste Approximation für  $\gamma$  verwendet. Wir haben die zweite Definition ( $\gamma 1$ ) hier erwähnt und den Zusammenhang mit der ersten Definition erläutert, da diese häufig in der Literatur zu finden ist.

## 1.7 Weierstraßsche Produktdarstellung der Gamma-Funktion

Der Kehrwert der Gamma-Funktion ist eine holomorphe Funktion mit Nullstellen  $z_i \in -\mathbb{N}$ . Er läßt sich daher als Weierstraßsches Produkt darstellen.

**Theorem 1.20.** Weierstraßsche Darstellung der Gamma-Funktion

Der Kehrwert der Gamma-Funktion hat folgende Darstellung als Weierstraßsches Produkt:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{z}{n} \right) e^{-\frac{z}{n}}$$

*Beweis.* Wir gehen von der Limes-Darstellung ( $\Gamma$  Limes) auf Seite 9 der Gamma-Funktion aus.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(z)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(z)_n}{(n-1)!n^z} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)} \frac{1}{e^{z \ln(n)}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z}{e^{z \ln(n)}} \left(1 + \frac{z}{1}\right) \cdot \left(1 + \frac{z}{2}\right) \cdots \left(1 + \frac{z}{n-1}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{z}{e^{z \ln(n)}} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{z}{k}\right) \right) \end{aligned}$$

Den Bruch erweitern wir mit

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{e^{\frac{z}{1} + \frac{z}{2} + \cdots + \frac{z}{n-1}}}{e^{\frac{z}{1} + \frac{z}{2} + \cdots + \frac{z}{n-1}}} \\ &= e^{zH_{n-1}} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} e^{-\frac{z}{k}} \end{aligned}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(z)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{z}{e^{z(H_n - \ln(n))}} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}} \right) \\ &= ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \end{aligned}$$

□

Aus der obigen Weierstraßschen Produktdarstellung erhalten wir eine Formel für den Logarithmus der Gamma-Funktion.

**Korollar 1.21.** *Für den Logarithmus der Gamma-Funktion gilt folgende Formel*

$$\begin{aligned} \ln(\Gamma(z)) &= -\ln\left(\frac{1}{\Gamma(z)}\right) \\ &= -\ln\left(ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}\right) \\ &= -\ln(z) - \gamma z - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{z}{n}\right) - \frac{z}{n}\right) \end{aligned}$$

## 1.8 Eulersche Spiegelungsformel

### Theorem 1.22. Eulersche Spiegelungsformel

Die Gamma-Funktion erfüllt folgende Gleichung:

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

*Beweis.* Ausgehend von der Produktdarstellung ( $\Gamma$ -Produkt) auf Seite 11 berechnen wir unter Beachtung der Eigenschaft ( $\Gamma 2$ )

$$\begin{aligned} \Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) &= \Gamma(z) \cdot (-z) \cdot \Gamma(-z) \\ &= \frac{1}{z} \left( \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^z \cdot \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} \right) \cdot (-z) \cdot \frac{1}{-z} \left( \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-z} \cdot \left(1 - \frac{z}{n}\right)^{-1} \right) \\ &= \frac{1}{z} \underbrace{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{z}{n}\right)^2\right)^{-1}}_{= \frac{\sin(\pi z)}{\pi z}} \\ &\quad \text{nach Beispiel 1.16} \\ &= \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \end{aligned}$$

□

Die Nützlichkeit dieser Formel erweist sich an der Stelle  $z = \frac{1}{2}$ .

**Korollar 1.23.** An der Stelle  $z = \frac{1}{2}$  hat die Gamma-Funktion den Wert

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

*Beweis.* Durch Einsetzen von  $z = \frac{1}{2}$  in die obige Formel ergibt sich der Wert der Gamma-Funktion.

Alternativ rechnet man mit der Integraldarstellung ( $\Gamma$  Integral) und der Substitution

$$\begin{aligned} t &= u^2 \\ dt &= 2udu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt \\
&= \int_0^{\infty} u^{-1} e^{-u^2} 2u du \\
&= \int_0^{\infty} 2e^{-u^2} du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du\right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} dv\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(u^2+v^2)} dudv
\end{aligned}$$

Nun wird in  $\mathbb{R}^2$  eine Substitution nach Polarkoordinaten durchgeführt:

$$\begin{aligned}
u &= r \sin(\varphi) \\
v &= r \cos(\varphi) \\
dudv &= r dr d\varphi
\end{aligned}$$

Man erhält

$$\begin{aligned}
\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 &= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} r e^{-r^2} dr d\varphi \\
&= \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \\
&= 2\pi \frac{1}{2} e^{-r^2} \Big|_0^{\infty} \\
&= \pi
\end{aligned}$$

□

## 1.9 Legendresche Verdoppelungsformel

Eine weitere Formel für die Gamma-Funktion ist die Legendresche Verdoppelungsformel.

**Theorem 1.24.** Legendresche Verdoppelungsformel

Der Wert der Gamma-Funktion an der Stelle  $2z$  berechnet sich aus der Formel:

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma(z) \cdot \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)$$

*Beweis.* Zum Beweis verwenden wir den in Theorem 1.8 bewiesenen Zusammenhang

zwischen der Beta-Funktion und der Gamma-Funktion.

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \\ &= \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \end{aligned}$$

Wir setzen  $x = y = z$  und erhalten

$$\frac{\Gamma(z)^2}{\Gamma(2z)} = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{z-1} dt$$

Nach einer Substitution

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{2}(1+u) \\ 1-t &= \frac{1}{2}(1-u) \\ dt &= \frac{1}{2} du \end{aligned}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(z)^2}{\Gamma(2z)} &= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}(1+u)\right)^{z-1} \left(\frac{1}{2}(1-u)\right)^{z-1} \frac{1}{2} du \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2z-1} \int_{-1}^1 (1-u^2)^{z-1} du \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2z-1} 2 \int_0^1 (1-u^2)^{z-1} du \end{aligned}$$

Denn der Integrand ist eine gerade Funktion. Nun substituieren wir

$$\begin{aligned} v &= u^2 \\ dv &= 2u du \\ du &= \frac{1}{2} \sqrt{v} dv \end{aligned}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(z)^2}{\Gamma(2z)} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2z-1} \int_0^1 v^{\frac{1}{2}} (1-v)^{z-1} dv \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2z-1} B\left(\frac{1}{2}, z\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2z-1} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma(z)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + z\right)} \end{aligned}$$

Dies lösen wir nun nach  $\Gamma(2z)$  auf und verwenden  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$  aus Korollar 1.23 und erhalten die Behauptung.

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma(z) \cdot \Gamma(z + \frac{1}{2})$$

□

Das obige Theorem 1.24 ist ein Spezialfall der allgemeineren Vervielfachungsformel von Gauss (1812).

**Theorem 1.25.** Gaußsche Vervielfachungsformel

Der Wert der Gamma-Funktion an der Stelle  $mz$  berechnet sich aus der Formel:

$$\Gamma(mz) = \frac{m^{mz-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}} \cdot \Gamma(z) \cdot \Gamma(z + \frac{1}{m}) \cdot \Gamma(z + \frac{2}{m}) \cdots \Gamma(z + \frac{m-1}{m})$$

## 1.10 Die Digamma-Funktion

In Korollar 1.21 haben wir bereits eine Formel für eine zur Gamma-Funktion verwandte Funktion kennen gelernt. Zur Definition einer weiteren zur Gamma-Funktion verwandten Funktion benötigen wir den Begriff der logarithmischen Ableitung.

**Definition 1.26.** Die logarithmische Ableitung einer Funktion  $f$  ist definiert durch

$$\begin{aligned} \partial^L f(z) &= \frac{d}{dz} \ln(f(z)) \\ &= \frac{f'(z)}{f(z)} \end{aligned}$$

**Proposition 1.27.** Die logarithmische Ableitung hat folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \partial^L (f \cdot g) &= \partial^L f + \partial^L g \\ \partial^L \left(\frac{f}{g}\right) &= \partial^L f - \partial^L g \\ \partial^L (c) &= 0 \quad \text{für konstante } c \\ \partial^L (z) &= \frac{1}{z} \end{aligned}$$

**Definition 1.28.** Die Digamma-Funktion ist definiert durch die logarithmische Ableitung der Gamma-Funktion.

$$\Psi(z) = \partial^L \Gamma(z)$$

**Proposition 1.29.** Für die Digamma-Funktion gelten folgende Formeln:

(i)

$$\Psi(z) = -\gamma + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+z} \right)$$

(ii)

$$\Psi'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+z)^2}$$

(iii)

$$\Psi(z+1) = \frac{1}{z} + \Psi(z)$$

(iv)

$$\Psi'(z+1) = -\frac{1}{z^2} + \Psi'(z)$$

(v)

$$\Psi(1) = -\gamma = \Gamma'(1)$$

(vi)

$$\Psi'(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi}{6}$$

*Beweis.* ad (i) Wir gehen von der Weierstraßschen Produktdarstellung 1.20 der Gamma-Funktion aus und setzen dies in die Definition der Digamma-Funktion ein.

$$\begin{aligned} \Psi(z) &= \partial^L \Gamma(z) \\ &= (\ln \Gamma(z))' \\ &= -\frac{1}{z} - \gamma - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} \frac{1}{1+\frac{z}{n}} - \frac{1}{n} \right) \\ &= -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+z} \right) \\ &= -\gamma - \frac{1}{z} + \underbrace{\left(1 - \frac{1}{1+z}\right)}_{\leftarrow} + \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+z}\right)}_{\leftarrow} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3+z}\right)}_{\leftarrow} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4+z}\right)}_{\leftarrow} \dots \\ &= -\gamma + \left(1 - \frac{1}{z}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+z}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2+z}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3+z}\right) + \dots \\ &= -\gamma + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+z} \right) \end{aligned}$$

ad (ii) Die Formel für die Ableitung der Digamma-Funktion folgt aus (i) direkt durch Ableiten.

ad (iii) Ausgehend von der Funktionalgleichung der Gamma-Funktion erhält man

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= z \cdot \Gamma(z) \\ \Rightarrow \ln(\Gamma(z+1)) &= \ln(z) + \ln(\Gamma(z)) \\ \Rightarrow \Psi(z+1) &= \frac{1}{z} + \Psi(z)\end{aligned}$$

ad (iv) Die Aussage folgt aus (iii) durch Ableiten.

ad (v) Die Aussage folgt aus (i) durch Einsetzen von  $z = 1$ . Da  $\Gamma(1) = 1$  ist, gilt auch

$$\Gamma'(1) = -\gamma$$

ad (vi) Die Aussage folgt aus (ii) durch Einsetzen von  $z = 1$ . Den Wert  $\frac{\pi}{6}$  haben wir bereits in Korollar 1.23 berechnet. □

## 2 Zeta-Funktion

In diesem Abschnitt wird die Riemannsche Zeta-Funktion behandelt. Dieser kommt mit der Riemannschen Vermutung, die bis heute nicht bewiesen ist, eine besondere Bedeutung zu. Ausgehend von der einfachen Darstellung als Reihe werden andere Darstellungen wie die Eulersche Produkt-Formel hergeleitet. Letztere stellt den Zusammenhang der Zeta-Funktion mit den Primzahlen und deren Verteilung her. Einige Eigenschaften und spezielle Werte der Zeta-Funktion werden erläutert. Dabei ergibt sich ein Zusammenhang mit den Bernoulli-Zahlen. Mit der Funktionalgleichung wird die Verbindung zur Gamma-Funktion hergestellt und es gelingt eine Fortsetzung der Zeta-Funktion auf die komplexe Zahlenebene.

**Definition 2.1.** Die Riemannsche Zeta-Funktion ist durch folgende Reihe definiert:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad s \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re}(s) > 1$$

**Proposition 2.2.** Die obige Reihendarstellung der Zeta-Funktion konvergiert für alle  $s$  mit  $\operatorname{Re}(s) > 1$  und es gilt

$$\zeta(\bar{s}) = \overline{\zeta(s)}$$

*Beweis.* Wir setzen  $s = x + iy$  und wenden die Eulersche Formel an.

$$\begin{aligned}
 n^{-\bar{s}} &= n^{(-x+iy)} \\
 &= n^{-x} \cdot e^{iy \ln(n)} \\
 &= n^{-x} \cdot (\cos(y \ln(n)) - i \sin(y \ln(n))) \\
 &= \overline{n^{-x} \cdot (\cos(y \ln(n)) + i \sin(y \ln(n)))} \\
 &= \overline{n^{-x} \cdot e^{-iy \ln(n)}} \\
 &= \overline{n^{-x-iy}} \\
 &= \overline{n^{-s}}
 \end{aligned}$$

Daraus folgt nach Summation

$$\zeta(\bar{s}) = \overline{\zeta(s)}$$

Da Cosinus und Sinus beschränkt sind, folgt die Konvergenz für  $Re(s) > 1$ . □

Wir werden später den Definitionsbereich der Zeta-Funktion auf die ganze komplexe Zahlenebene mit Ausnahme der 1 erweitern.

Für  $s = 1$  erhält man die harmonische Reihe, die bekanntlich divergiert.

Für  $s = 2$  erhält man die Reihe

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Diese haben wir bereits in Beispiel 1.16 als Baseler Problem behandelt.

## 2.1 Dirichlet-Reihen

Eine interessante Verallgemeinerung der Zeta-Funktion sind die Dirichlet-Reihen.

**Definition 2.3.** Sei  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}$  eine Folge komplexer Zahlen. Dann wird eine Dirichlet-Reihe definiert durch

$$L_a(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

Dirichlet-Reihen können multipliziert werden. Die Eigenschaften dieser Multiplikation sind:

**Proposition 2.4.** (i) Die Folge der  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des Produkts zweier Dirichlet-Reihen  $L_a(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$  und  $L_b(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$  entsteht durch Faltung.

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j$$

Schreibweise:  $c = a \star b$

(ii) Die Multiplikation zweier Dirichlet-Reihen ist assoziativ und kommutativ.

(iii) Das Eins-Element, das heisst die konstante Funktion 1, ist gegeben durch

$$\delta = (1, 0, 0, \dots)$$

(iv) Die Folge

$$\iota = (1, 1, 1, \dots)$$

ergibt die Zeta-Funktion als spezielle Dirichlet-Reihe.

(v) Für eine Dirichlet Reihe gilt

$$(a \star \iota)_k = \sum_{i|k} a_i$$

(v) Eine Dirichlet Reihe ist genau dann invertierbar, wenn gilt

$$a_1 \neq 0$$

Eine Potenzreihe  $f_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  ist konvergent für  $|z| < \rho$  mit dem Konvergenzradius  $\rho = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$  und divergent für  $|z| > \rho$ . Für  $|z| = \rho$  ist keine Aussage möglich, es muss jedoch mindestens eine Singularität geben.

Bei Dirichlet Reihen tritt an die Stelle des Konvergenzradius die Konvergenzabszisse.

**Proposition 2.5.** Sei  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine komplexe Zahlenfolge. Dann konvergiert die Dirichlet-Reihe  $L_a(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$  für alle  $s < \sigma_0$ , wobei  $\sigma_0$  definiert ist durch:

$$\sigma_0 = \begin{cases} \limsup_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln(|\sum_{n=1}^N a_n|)}{\ln(N)} \right) & \text{für } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergent} \\ \limsup_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln(|\sum_{n=N}^{\infty} a_n|)}{\ln(N)} \right) & \text{für } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent} \end{cases}$$

**Beispiel 2.6.** Die Zeta-Funktion wird als Dirichlet-Reihe durch die Folge  $a_n \equiv 1$  dargestellt, deren Summe divergiert. Sie hat die Konvergenzabszisse  $\sigma_0 = 1$ .

### 2.1.1 Eulersche Produktformel

Die Zeta-Funktion war bereits Euler bekannt. Die folgende Produktformel geht auf ihn zurück und stellt eine überraschende Verbindung der Zeta-Funktion zu den Primzahlen her.

**Theorem 2.7.** Eulersche Produktformel

Die Zeta-Funktion hat folgende Darstellung als unendliches Produkt:

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \quad (\text{ZP})$$

Dabei bezeichnet  $\mathbb{P} = \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ prim}\}$  die Menge aller Primzahlen.

*Beweis.* Der Beweis verwendet, dass jede natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$  eine eindeutige Primfaktorzerlegung besitzt.

$$\begin{aligned} n &= p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r} \quad p_i \in \mathbb{P}, e_i \in \mathbb{N}^+ \\ &= \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{e_p} \quad \text{nur endlich viele } e_i \neq 0 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für die Zeta-Funktion

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{e_p s}} \\ &= \prod_{p \in \mathbb{P}} \sum_{e_p > 0} \frac{1}{p^{e_p s}} \\ &= \left(\sum_{e_2 > 0} \frac{1}{2^{e_2 s}}\right) \cdot \left(\sum_{e_3 > 0} \frac{1}{3^{e_3 s}}\right) \cdot \left(\sum_{e_5 > 0} \frac{1}{5^{e_5 s}}\right) \cdots \\ &= \prod_{p \in \mathbb{P}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{k s}} \\ &= \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}} \end{aligned}$$

Dabei wurde die Summenformel der geometrischen Reihe verwendet. □

Dieses Ergebnis kann auf Dirichlet-Reihen verallgemeinert werden. Dazu benötigen wir den Begriff der Multiplikativität von Folgen.

**Definition 2.8.** Eine Folge komplexer Zahlen  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , die nicht identisch verschwindet, heisst multiplikativ, wenn für alle teilerfremden Indizes  $n, m$  das Produkt  $a_n \cdot a_m = a_{n \cdot m}$  ist.

Die Folge heisst streng multiplikativ, wenn  $a_n \cdot a_m = a_{n \cdot m}$  für alle Indizes gilt.

In der Literatur wird die strenge Multiplikativität auch mit stark, strikt oder vollständig bezeichnet.

**Theorem 2.9.** Die Dirichlet-Reihe einer multiplikativen Folge  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_1 = 1$  kann wie folgt als Produkt dargestellt werden:

$$L_a(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left( 1 + \frac{a_p}{p^s} + \frac{a_{p^2}}{p^{2s}} + \frac{a_{p^3}}{p^{3s}} + \dots \right)$$

Ist  $a$  streng multiplikativ, gilt sogar

$$L_a(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left( 1 - \frac{a_p}{p^s} \right)^{-1} \tag{DP}$$

*Beweis.* Der Beweis geht wie für die Eulersche Produktformel für die Zeta-Funktion und verwendet, dass jede natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$  eine eindeutige Primfaktorzerlegung besitzt.

$$\begin{aligned} n &= p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r} \quad p_i \in \mathbb{P}, e_i \in \mathbb{N}^+ \\ &= \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{e_p} \quad \text{nur endlich viele } e_i \neq 0 \end{aligned}$$

Zudem gilt für multiplikative Folgen

$$\begin{aligned} a_n &= a_{p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}} \\ &= a_{p_1^{e_1}} \cdot a_{p_2^{e_2}} \cdots a_{p_r^{e_r}} \end{aligned}$$

Denn verschiedene Primzahlen sind teilerfremd,  $ggT(p_i, p_j) = 1$  für  $i \neq j$ . Somit ergibt sich für die Dirichlet-Reihe

$$\begin{aligned} L_a(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{a_{p^{e_p}}}{p^{e_p s}} \\ &= \prod_{p \in \mathbb{P}} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{p^k}}{p^{ks}} \right) \\ &= \prod_{p \in \mathbb{P}} \left( 1 + \frac{a_p}{p^s} + \frac{a_{p^2}}{p^{2s}} + \frac{a_{p^3}}{p^{3s}} + \dots \right) \end{aligned}$$

Gilt überdies die strenge Multiplikativität, dann kann die Summenformel der geometrischen Reihe angewendet werden.

$$\begin{aligned} \prod_{p \in \mathbb{P}} \left( 1 + \frac{a_p}{p^s} + \frac{a_{p^2}}{p^{2s}} + \frac{a_{p^3}}{p^{3s}} + \dots \right) &= \prod_{p \in \mathbb{P}} \left( 1 + \frac{a_p}{p^s} + \left( \frac{a_p}{p^s} \right)^2 + \left( \frac{a_p}{p^s} \right)^3 + \dots \right) \\ &= \prod_{p \in \mathbb{P}} \left( 1 - \frac{a_p}{p^s} \right)^{-1} \end{aligned}$$

□

**Theorem 2.10.** Wenn die Folgen  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  multiplikativ sind, dann ist auch ihr Faltprodukt  $a \star b$  und  $a^{-1}$  multiplikativ, sofern das Inverse existiert.

*Beweis.* Sei  $c = a \star b$  mit

$$c_n = \sum_{i \cdot k = n} a_i \cdot b_k$$

Seien weiter  $n, m$  zwei teilerfremde Indizes. Dann gilt:

$$\begin{aligned} c_n \cdot c_m &= \left( \sum_{i \cdot j = n} a_i \cdot b_j \right) \cdot \left( \sum_{k \cdot l = m} a_k \cdot b_l \right) \\ &= \sum_{i \cdot j = n} \sum_{k \cdot l = m} (a_i \cdot a_k \cdot b_j \cdot b_l) \\ &= \sum_{i \cdot j \cdot k \cdot l = n \cdot m} (a_{i \cdot k} \cdot b_{j \cdot l}) \end{aligned}$$

Denn wenn  $n, m$  teilerfremd sind, sind alle Teiler  $i, j$  von  $n$  teilerfremd zu allen Teilern  $k, l$  von  $m$ . Nun können  $i \cdot k = r$  und  $j \cdot l = s$  zusammengefasst werden und es folgt:

$$\begin{aligned} c_n \cdot c_m &= \sum_{i \cdot k \cdot j \cdot l = n \cdot m} (a_{i \cdot k} \cdot b_{j \cdot l}) \\ &= \sum_{r \cdot s = n \cdot m} (a_r \cdot b_s) \\ &= c_{n \cdot m} \end{aligned}$$

□

### 2.1.2 Reziproke Zeta-Funktion

Mit Hilfe der Möbius-Funktion läßt sich die reziproke Zeta-Funktion einfach darstellen.

**Definition 2.11.** Die Möbius-Funktion  $\mu(n)$  ist für alle natürlichen Zahlen  $n \in \mathbb{N}$  definiert durch

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^r & \text{falls } n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_r \\ & \text{das quadratfreie Produkt verschiedener Primzahlen ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\mu)$$

Insbesondere nimmt die Möbius-Funktion für alle Primzahlen den Wert  $-1$  an. Die ersten Werte sind:

|          |   |    |    |   |    |   |    |   |   |     |
|----------|---|----|----|---|----|---|----|---|---|-----|
| $n$      | 1 | 2  | 3  | 4 | 5  | 6 | 7  | 8 | 9 | ... |
| $\mu(n)$ | 1 | -1 | -1 | 0 | -1 | 1 | -1 | 0 | 0 |     |

**Theorem 2.12.** Die reziproke Zeta-Funktion hat die Darstellung

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

*Beweis.* Nach der Eulerschen Produktformel (ZP) hat  $\zeta^{-1}(s)$  die Darstellung

$$\zeta^{-1}(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

Werden die Faktoren ausmultipliziert, erhält man

$$\begin{aligned} \zeta^{-1}(s) &= 1 - \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^s} + \sum_{p_1, p_2 \in \mathbb{P}} \frac{1}{(p_1 \cdot p_2)^s} - \sum_{p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}} \frac{1}{(p_1 \cdot p_2 \cdot p_3)^s} \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \\ &= L_a(s) \end{aligned}$$

mit einer Dirichlet-Reihe zu einer Folge  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Koeffizientenvergleich liefert

$$a_n = \begin{cases} (-1)^r & \text{falls } n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r \\ & \text{das quadratfreie Produkt verschiedener Primzahlen ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Somit ist  $a_n = \mu_n$  die Möbius-Funktion. □

**Korollar 2.13.** Es gilt die Möbiussche Inversionsformel

$$\iota \star \mu = \delta$$

**Bemerkung 2.14.** Die Möbius-Funktion  $\mu$  ist multiplikativ, aber nicht streng multi-

plikativ. Denn für zwei teilerfremde  $n, m$  gilt

$$\mu_{n \cdot m} = \begin{cases} 0 & = 0 \cdot \mu(m) & \text{falls } n \text{ nicht quadratfrei ist} \\ 0 & = \mu(n) \cdot 0 & \text{falls } m \text{ nicht quadratfrei ist} \\ (-1)^{r+s} & = (-1)^r \cdot (-1)^s & \text{falls } n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_r \\ & & m = p_1 \cdot p_2 \cdots p_s \\ & & \text{quadratfrei sind} \end{cases}$$

Haben jedoch quadratfreie  $n$  und  $m$  einen gemeinsamen Primfaktor, dann ist  $n \cdot m$  nicht mehr quadratfrei und es gilt

$$0 = \mu_{n \cdot m} \neq \mu(n) \cdot \mu(m) = (-1)^{r+s}$$

### 2.1.3 Ableitung von Dirichlet-Reihen

**Proposition 2.15.** Die Ableitung einer Dirichlet-Reihe zur Folge  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist

$$\frac{d}{ds} L_a(s) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cdot \ln(n)}{n^s}$$

Insbesondere gilt

$$\frac{d}{ds} \zeta(s) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^s} = L_{\ln}(s)$$

*Beweis.* Zum Beweis betrachten wir die Ableitung von  $n^{-s}$ .

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (n^{-s}) &= \frac{d}{ds} (e^{-\ln(n)s}) \\ &= -\ln(n) e^{-\ln(n)s} \\ &= -\ln(n) n^{-s} \end{aligned}$$

□

**Proposition 2.16.** Der Logarithmus einer Dirichlet-Reihe mit einer streng multiplikativen Folge  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist

$$\ln(L_a(s)) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \left( 1 + \frac{a_p}{p^s} + \frac{a_p^2}{2p^{2s}} + \frac{a_p^3}{3p^{3s}} + \dots \right)$$

Insbesondere gilt

$$\ln(\zeta(s)) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot p^{ks}}$$

*Beweis.* Zum Beweis setzen wir die bekannte Formel

$$\ln((1-x)^{-1}) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

in die Produktdarstellung ein:

$$L_a(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{a_p}{p^s}\right)^{-1}$$

□

**Proposition 2.17.** *Die logarithmische Ableitung einer Dirichlet-Reihe mit einer streng multiplikativen Folge  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist*

$$\partial^L(L_a(s)) = - \sum_{p \in \mathbb{P}} \ln(p) \cdot \left(\frac{a_p}{p^s} + \frac{a_p^2}{p^{2s}} + \frac{a_p^3}{p^{3s}} + \dots\right)$$

*Insbesondere gilt*

$$\begin{aligned} \partial^L(\zeta(s)) &= \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \\ &= - \sum_{p \in \mathbb{P}} \ln(p) \cdot \left(\frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \dots\right) \\ &= -L_\Lambda(s) \end{aligned}$$

*Mit der von Mangoldt-Funktion*

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln(p) & \text{für } n = p^k \quad p \in \mathbb{P}, k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

*Beweis.* Wir gehen von der Produktdarstellung (DP) einer Dirichlet-Reihe mit einer streng multiplikativen Folge  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  aus und verwenden die bekannte Formel

$$\ln((1-x)^{-1}) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}
 \partial^L(L_a(s)) &= \partial^L\left(\prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{a_p}{p^s}\right)^{-1}\right) \\
 &= \sum_{p \in \mathbb{P}} \partial^L\left(1 - \frac{a_p}{p^s}\right)^{-1} \\
 &= \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{d}{ds} \ln\left(1 - \frac{a_p}{p^s}\right)^{-1} \\
 &= \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{d}{ds} \left(\frac{a_p}{p^s} + \frac{a_p^2}{p^{2s}} + \frac{a_p^3}{p^{3s}} + \dots\right) \\
 &= \sum_{p \in \mathbb{P}} (-\ln(p)) \left(\frac{a_p}{p^s} + \frac{a_p^2}{p^{2s}} + \frac{a_p^3}{p^{3s}} + \dots\right)
 \end{aligned}$$

□

## 2.2 Bernoulli-Zahlen

Euler hat nach der Lösung des Baseler Problems  $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$  weitere Werte der Zeta-Funktion berechnet. Dabei spielen die Bernoulli-Zahlen eine Rolle, die wir nun definieren.

**Definition 2.18.** Die Bernoulli-Zahlen  $B_n$  sind definiert durch die Reihenentwicklung der Funktion

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$$

**Bemerkung 2.19.** Bernoulli fand die Zahlen durch Betrachtung der Summen von Potenzen natürlicher Zahlen bis zu einem vorgegebenen Wert.

$$\begin{aligned}
 1 + 2 + 3 + \dots + n &= \binom{n+1}{2} \\
 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k &= \text{Polynom vom Grad } k+1 \text{ in } n
 \end{aligned}$$

Wird anstelle der natürlichen Zahlen eine Variable  $x$  eingesetzt, erhält man die Bernoulli-Polynome.

**Theorem 2.20.** Die Bernoulli-Zahlen genügen folgender Rekursionsformel:

$$\begin{aligned}
 B_0 &= 1 \\
 \sum_{j=0}^n \binom{n+1}{j} B_j &= 0
 \end{aligned}$$

Die letzte Zeile können wir nach  $B_n$  auflösen:

$$B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n+1}{j} B_j$$

Die Bernoulli-Zahlen können mit folgender sagemath Prozedur berechnet werden.

```
def bernoulli_zahlen(fin):
    bz = list()
    bz.append(1)
    for k in range(1,fin):
        bsum = 0
        for j in range(k):
            bsum += binomial(k+1,j) * bz[j]
        bz.append(-bsum / (k+1))
    return bz
```

Die ersten Bernoulli-Zahlen sind

|       |   |      |     |   |       |   |      |   |       |   |      |    |           |    |     |     |
|-------|---|------|-----|---|-------|---|------|---|-------|---|------|----|-----------|----|-----|-----|
| n     | 0 | 1    | 2   | 3 | 4     | 5 | 6    | 7 | 8     | 9 | 10   | 11 | 12        | 13 | 14  | ... |
| $B_n$ | 1 | -1/2 | 1/6 | 0 | -1/30 | 0 | 1/42 | 0 | -1/30 | 0 | 5/66 | 0  | -691/2730 | 0  | 7/6 | ... |

In der Tabelle sind die Bernoulli Zahlen mit ungeradem Index, mit Ausnahme der 1, 0. Dies ist generell der Fall.

**Theorem 2.21.** Für die Bernoulli-Zahlen mit ungeradem Index, mit Ausnahme der 1, gilt

$$B_{2n+1} = 0 \quad \text{für } n \geq 1$$

*Beweis.* Nach der Definition der Bernoulli-Zahlen 2.18 genügt es zu zeigen, dass die Funktion

$$\frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2}$$

eine gerade Funktion ist. Denn dann müssen die Koeffizienten der ungeraden Potenzen

von  $x$  verschwinden.

$$\begin{aligned} \frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} &= \frac{x}{2} \left( \frac{2 + e^x - 1}{e^x - 1} \right) \\ &= \frac{x}{2} \left( \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \right) \\ &= \frac{x}{2} \left( \frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} \right) \\ &= \frac{-x}{2} \left( \frac{e^{-\frac{x}{2}} + e^{-\frac{-x}{2}}}{e^{-\frac{x}{2}} - e^{-\frac{-x}{2}}} \right) \\ &= \frac{x}{2} \left( \frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} \right) \end{aligned}$$

□

Aus den in obigem Beweis verwendeten Formeln ergibt sich eine Reihendarstellung für die Cotangens-Funktion.

**Korollar 2.22.** Die Funktion  $z \cdot \cot(z)$  hat folgende Reihenentwicklung:

$$z \cdot \cot(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-4)^n \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n} \quad (\text{COT})$$

*Beweis.* Nach Theorem 2.21 verschwinden die Bernoulli-Zahlen mit ungeradem Index größer 1. Im Beweis wird folgende Formel hergeleitet, in die wir  $x = 2iz$  einsetzen und die Beziehung zwischen der e-Funktion und den trigonometrischen Funktionen ausnutzen.

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} x^{2n} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} (2iz)^{2n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-4)^n \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n} \\ &= z \cdot i \left( \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} \right) \\ &= z \cdot \cot(z) \end{aligned}$$

□

Wir haben bereits den Funktionswert der Zeta-Funktion an der Stelle 2 im Beispiel 1.16 berechnet, der auf Euler zurückgeht. Euler hat die Funktionswerte an allen geraden, natürlichen Zahlen berechnet.

**Theorem 2.23.** Eulersche Formel

Die Funktionswerte der Zeta-Funktion an geraden, natürlichen Zahlen berechnen sich

mit der Formel

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n-1}}{2} \cdot \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!} \cdot B_{2n}$$

*Beweis.* Wir gehen von der Produktdarstellung der Sinus-Funktion in Beispiel 1.16 aus und bilden von beiden Seiten die logarithmische Ableitung unter Beachtung der Eigenschaften in 1.27.

$$\begin{aligned} \sin(\pi z) &= \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \\ &= \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{z}{n}\right) \\ &\quad \downarrow \partial^L \qquad \downarrow \partial^L \\ \pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n}\right) \end{aligned}$$

Nun berechnen wir die Taylor-Reihe der Funktion an der Stelle  $z = 0$

$$\begin{aligned} f(z) &= \pi \cot(\pi z) - \frac{1}{z} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n}\right) \end{aligned}$$

Die Ableitungen von  $f(z)$  sind

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \cdot k! \left(\frac{1}{(z+n)^{k+1}} + \frac{1}{(z-n)^{k+1}}\right)$$

An der Stelle 0 ergibt sich

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{für } k = 2m \\ (-2) \cdot (2m-1)! \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}} & \text{für } k = 2m-1 \end{cases}$$

Somit hat die Funktion  $f$  an der Stelle 0 die Taylor-Entwicklung

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (-2) \zeta(2m) z^{2m-1} \\ \Rightarrow \pi z \cot(\pi z) &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-2) \zeta(2m) z^{2m} \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich mit Formel (COT) folgt die Behauptung. □

Da in der Euler-Formel  $\pi$  auftritt, sind die Funktionswerte  $\zeta(2m)$  irrational und transzendent. Für die Funktionswerte der Zeta-Funktion an ungeraden natürlichen Zahlen gibt es dagegen bis heute keine Formel. Roger Apéry bewies erst 1979, dass  $\zeta(3) \approx 1,20205$  eine irrationale Zahl ist.

### 2.3 Dirichletsche Eta-Funktion

Die Zeta-Funktion ist der einfachste Fall einer Dirichlet-Reihe, nämlich mit der Folge  $a_n = 1$  für alle  $n$ . Eine weitere einfache Dirichlet-Reihe ist die Dirichletsche Eta-Funktion, die mit der Folge  $a_n = (-1)^n$  gebildet wird. Diese soll nun definiert werden und der Zusammenhang mit der Zeta-Funktion wird erläutert.

**Definition 2.24.** Die Dirichletsche Eta-Funktion ist definiert durch

$$\eta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^z} \tag{ETA}$$

Diese Darstellung der Eta-Funktion konvergiert für  $0 < \operatorname{Re}(z)$ . Die Eta-Funktion kann jedoch auf die ganze komplexe Zahlenebene analytisch fortgesetzt werden. Die alternierende harmonische Reihe ergibt sich als Funktionswert  $\eta(1) = \ln(2)$ .

**Theorem 2.25.** Die Eta-Funktion ergibt sich aus der Zeta-Funktion durch folgende Gleichung:

$$\eta(z) = (1 - 2^{1-z}) \cdot \zeta(z)$$

*Beweis.* Durch einfaches Nachrechnen ergibt sich

$$\begin{aligned} (1 - 2^{1-z}) \cdot \zeta(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} - 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^z} \\ &= 1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \dots - 2 \cdot \left( \frac{1}{2^z} + \frac{1}{4^z} + \frac{1}{6^z} + \dots \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} - \frac{1}{4^z} + \frac{1}{5^z} - \frac{1}{6^z} \mp \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^z} \\ &= \eta(z) \end{aligned}$$

□

Als Folgerung ergibt sich die Konvergenz der Zeta-Funktion auch für  $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$ .

## 2.4 Mellin-Transformation

Eine weitere Darstellung der Zeta-Funktion erhalten wir mit Hilfe der Mellin-Transformation.

**Definition 2.26.** Sei  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  eine komplexwertige Funktion. Dann ist die Mellin-Transformierte Funktion  $F$  definiert durch

$$F(s) = \mathcal{M}(f)(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot t^{s-1} dt$$

**Beispiel 2.27.** Die Mellin-Transformierte der Funktion  $f(t) = e^{-t}$  ist die Gamma-Funktion. Dies folgt sofort aus der Integral-Darstellung der Gamma-Funktion ( $\Gamma$  Integral).

Mit Hilfe der Gamma-Funktion läßt sich sogar weitergehend ein Zusammenhang von Dirichlet-Reihen und Potenzreihen beweisen.

**Theorem 2.28.** *Das Produkt einer Dirichlet-Reihe*

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$$

mit der Gamma-Funktion ist die Mellin-Transformierte der Funktion  $g(z) = f(e^{-nz})$ , wobei  $f$  durch die Potenzreihe

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot s^n$$

gegeben ist. Das heisst, es gilt

$$\Gamma(z) \cdot F(z) = \mathcal{M}(f(e^{-s}))(z) \quad (\text{MT})$$

*Beweis.* Zum Beweis wird die Integraldarstellung ( $\Gamma$  Integral) der Gamma-Funktion benutzt.

$$\begin{aligned} \Gamma(z) \cdot F(z) &= \left( \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \right) \cdot \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z} \right) \\ &= \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \left( \frac{t}{n} \right)^{z-1} e^{-t} dt \end{aligned}$$

Nach der Substitution

$$\begin{aligned} x &= \frac{t}{n} \\ dx &= \frac{dt}{n} \end{aligned}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}\Gamma(z) \cdot F(z) &= \int_0^\infty \left( \sum_{n=1}^\infty a_n e^{-nx} \right) x^{z-1} dx \\ &= \mathcal{M}(f(e^{-z}))\end{aligned}$$

□

**Korollar 2.29.** Die Zeta-Funktion hat die Integral-Darstellung

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \frac{x^{z-1}}{e^x - 1} dx$$

Die Formel gilt für alle  $z \notin \{1, 0, -1, -2, \dots\}$ .

*Beweis.* In Gleichung (MT) wird  $F(z) = \zeta(z)$  gesetzt, das heisst  $a_n \equiv 1$  und nach  $\zeta(z)$  aufgelöst.

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \underbrace{\left( \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{e^{nx}} \right)}_{=\frac{1}{e^x-1}} x^{z-1} dx$$

□

## 2.5 Funktionalgleichung der Zeta-Funktion

Wie bei der Gamma-Funktion spielt auch bei der Zeta-Funktion die Funktionalgleichung eine bedeutende Rolle. Euler veröffentlichte diese bereits 1761, gab jedoch noch keinen exakten Beweis an. Dieser wurde erst durch Riemann gegeben. Zum Beweis der Funktionalgleichung verwenden wir die Abelsche partielle Summation, die zunächst erläutert wird.

**Proposition 2.30.** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge komplexer Zahlen und  $f : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}$  eine reelle, stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt

$$\sum_{n=[b]}^{[c]} a_n f(n) = \left( \sum_{n=[b]}^{[c]} a_n \right) f(c) - \int_b^c \left( \sum_{n=[b]}^{[t]} a_n \right) f'(t) dt$$

*Beweis.* Beweis durch Nachrechnen.

$$\begin{aligned}
 \left( \sum_{n=\lceil b \rceil}^{\lfloor c \rfloor} a_n \right) f(c) - \sum_{n=\lceil b \rceil}^{\lfloor c \rfloor} a_n f(n) &= \left( \sum_{n=\lceil b \rceil}^{\lfloor c \rfloor} a_n \right) (f(c) - f(n)) \\
 &= \left( \sum_{n=\lceil b \rceil}^{\lfloor c \rfloor} a_n \right) \int_n^c f'(t) dt \\
 &= \int_b^c \left( \sum_{n=\lceil b \rceil}^{\lfloor t \rfloor} a_n \right) f'(t) dt
 \end{aligned}$$

□

Bevor diese Formel auf die Zeta-Funktion angewendet wird, benötigen wir noch den Begriff des Bruchanteils.

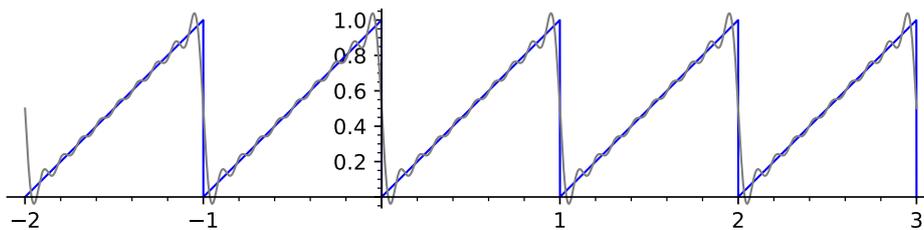
**Definition 2.31.** Der Bruchanteil von  $x$  ist definiert durch:

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$$

Dies ist eine periodische Funktion. Die Fourierreihe ist gegeben durch

$$\{x\} = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \sin(2\pi nx)$$

Der Bruchanteil wird auch Sägezahnfunktion oder Kippschwingung genannt. Im Schaubild wird die Sägezahnfunktion blau dargestellt und die Approximation durch die ersten 10 Summanden der Fourierreihe grau.



**Korollar 2.32.** Für die Zeta-Funktion gilt die Formel

$$a^s \cdot \zeta(s) = \frac{as}{s-1} - s \int_1^{\infty} \frac{\{at\}}{t^{s+1}} dt \tag{ZI1}$$

*Beweis.* Wir wenden Abelsche partielle Summation an mit der Folge  $a_n \equiv 1$  und der

Funktion  $f(t) = \left(\frac{a}{t}\right)^s$  im Intervall  $[1, ax]$ .

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\lfloor ax \rfloor} \left(\frac{a}{n}\right)^s &= \lfloor ax \rfloor \cdot \left(\frac{a}{x}\right)^s + s \int_1^{ax} [t] \cdot \left(\frac{a}{t}\right)^{s+1} dt \\ &= \lfloor ax \rfloor \cdot \left(\frac{a}{x}\right)^s + s \int_1^x [av] \cdot \left(\frac{1}{v}\right)^{s+1} dv \\ &\quad \text{nach Substitution } t = av \end{aligned}$$

Nach Grenzübergang  $x \rightarrow \infty$  ergibt sich daraus

$$a^s \cdot \zeta(s) = s \int_1^\infty \frac{[at]}{t^{s+1}} dt$$

Wegen

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{at}{t^{s+1}} dt &= \int_1^\infty \frac{a}{t^s} dt \\ &= \frac{a}{s-1} \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} a^s \cdot \zeta(s) &= \frac{as}{s-1} - s \int_1^\infty \frac{at - [at]}{t^{s+1}} dt \\ &= \frac{as}{s-1} - s \int_1^\infty \frac{\{at\}}{t^{s+1}} dt \end{aligned}$$

□

Obwohl wir von der Reihendarstellung der Zeta-Funktion ausgegangen sind, die ja nur für  $1 < \operatorname{Re}(s)$  konvergiert, konvergiert das Integral auf der rechten Seite in Gleichung (ZI1) auch für  $0 < \operatorname{Re}(s)$ . Dies führt zu einer Integral-Darstellung der Zeta-Funktion für  $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$ , die wir beim Beweis der Funktionalgleichung verwenden.

**Korollar 2.33.** Die Zeta-Funktion hat für  $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$  die Darstellung

$$a^s \cdot \zeta(s) = -s \int_0^\infty \frac{\{at\}}{t^{s+1}} dt \tag{ZI2}$$

*Beweis.* Wir müssen nur zeigen, dass in der Darstellung (ZI1) der erste Summand das

Integral von 0 bis 1 ergibt. Für  $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$  gilt

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\{at\}}{t^{s+1}} dt &= \int_0^1 \frac{at}{t^{s+1}} dt \\ &= a \int_0^1 \frac{1}{t^s} dt \\ &= a \frac{t^{s-1}}{1-s} \Big|_0^1 \\ &= \frac{a}{1-s} \end{aligned}$$

□

Im Beweis der Funktionalgleichung wird auch eine interessante Integraldarstellung für die Gamma-Funktion verwendet.

**Proposition 2.34.** Für  $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$  gilt folgende Formel:

$$\int_0^\infty x^{s-1} \sin(x) dx = \Gamma(s) \cdot \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \quad (\text{GI})$$

*Beweis.* Zum Beweis verwenden wir die Eulersche Formel

$$\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

Damit erhalten wir

$$\int_0^\infty x^{s-1} \sin(x) dx = \frac{1}{2i} \left( \int_0^\infty x^{s-1} (e^{ix} - e^{-ix}) dx \right)$$

Nach Substitutionen

$$\begin{aligned} x &= \pm iu \\ dx &= \pm i du \end{aligned}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{s-1} \sin(x) dx &= \frac{1}{2i} \left( i^{s-1} i \underbrace{\int_0^\infty u^{s-1} e^{-u} du}_{=\Gamma(s)} - (-i)^{s-1} (-i) \underbrace{\int_0^\infty u^{s-1} e^{-u} du}_{=\Gamma(s)} \right) \\ &= \Gamma(s) \cdot \frac{1}{2i} \left( e^{i\pi \frac{s}{2}} - e^{-i\pi \frac{s}{2}} \right) \\ &= \Gamma(s) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}s\right) \end{aligned}$$

Denn es ist  $i^s = e^{i\frac{\pi}{2}s}$  und mit der Eulerschen Formel ergibt sich die Behauptung.  $\square$

**Theorem 2.35.** Die Zeta-Funktion erfüllt folgende Funktionalgleichung:

$$\zeta(s) = 2^s \cdot \pi^{s-1} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}s\right) \cdot \Gamma(1-s) \cdot \zeta(1-s) \quad (\text{ZF})$$

*Beweis.* Für diese Formel gibt es mehrere Beweise. Dieser Beweis geht von obiger Darstellung (ZI2) der Zeta-Funktion durch ein Integral über die Sägezahnfunktion aus, setzt die Fourier Entwicklung der Sägezahnfunktion ein, vertauscht Integral und Summation, wertet die Integrale mit Gleichung (GI) aus.

$$\begin{aligned} \underline{(2^s - 1) \cdot \frac{1}{s} \zeta(s)} &= \int_0^\infty x^{-s-1} (\{x\} - \{2x\}) dx \\ &= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n\pi} \int_0^\infty x^{-s-1} (\sin(4\pi nx) - \sin(2\pi nx)) dx \\ &= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n\pi} \left( (4\pi n)^s \Gamma(-s) \sin\left(-\frac{\pi}{2}s\right) - (2\pi n)^s \Gamma(-s) \sin\left(-\frac{\pi}{2}s\right) \right) \\ &\quad \text{nach Substitution } x = \frac{u}{4\pi n} \text{ bzw. } x = \frac{u}{2\pi n} \\ &= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n\pi} (2^{2s} - 2^s) (\pi n)^s \Gamma(-s) \sin\left(-\frac{\pi}{2}s\right) \\ &= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n\pi)^{1-s}} 2^s (1 - 2^s) \Gamma(-s) \sin\left(\frac{\pi}{2}s\right) \\ &= 2^s \underline{(2^s - 1)} \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi}{2}s\right) \frac{1}{s} \Gamma(1-s) \zeta(1-s) \end{aligned}$$

Denn nach der Funktionalgleichung der Gamma-Funktion gilt  $\Gamma(-s) = -\frac{1}{s} \Gamma(1-s)$  und die unterstrichenen Terme auf beiden Seiten heben sich weg.  $\square$

Eine einfachere Form hat die Funktionalgleichung für die Riemannsche Xi-Funktion.

**Definition 2.36.** Die Riemannsche Xi-Funktion ist definiert durch

$$\xi(s) = \frac{1}{2} \cdot \pi^{-\frac{s}{2}} \cdot s \cdot (s-1) \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \zeta(s)$$

**Korollar 2.37.** Die Riemannsche Xi-Funktion erfüllt die Funktionalgleichung

$$\xi(s) = \xi(1-s)$$

*Beweis.* Zum Beweis nutzen wir die Funktionalgleichung der Zeta-Funktion, die Legendre

dresche Verdoppelungsformel 1.24 und die Eulersche Spiegelungsformel 1.22.

$$\begin{aligned}
 \xi(s) &= \frac{1}{2} \cdot \pi^{-\frac{s}{2}} \cdot s \cdot (s-1) \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \zeta(s) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \pi^{-\frac{s}{2}} \cdot s \cdot (s-1) \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \cdot 2^s \cdot \pi^{s-1} \cdot \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \Gamma(1-s) \cdot \zeta(1-s) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \pi^{-\frac{s}{2}} \cdot s \cdot (s-1) \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \underbrace{2^s \cdot \Gamma(1-s)}_{=\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)} \cdot \pi^{s-1} \cdot \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \zeta(1-s) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \pi^{-\frac{s}{2}} \cdot s \cdot (s-1) \cdot \underbrace{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)}_{=\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \pi^{s-1} \cdot \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \zeta(1-s) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \pi^{-\frac{1-s}{2}} \cdot s \cdot (s-1) \cdot \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \cdot \zeta(1-s) \\
 &= \xi(1-s)
 \end{aligned}$$

□

Aus der Funktionalgleichung ergeben sich mehrere Folgerungen.

**Theorem 2.38.** Die Funktionswerte der Zeta-Funktion für negative natürliche Zahlen sind

$$\zeta(-m) = -\frac{B_{m+1}}{m+1} \quad \text{für } m \in \mathbb{N}$$

Dabei sind  $B_m$  die Bernoulli-Zahlen aus Definition 2.18. Insbesondere ergeben sich die trivialen Nullstellen der Zeta-Funktion zu

$$\zeta(-2m) = 0$$

*Beweis.* Aus der Funktionalgleichung (ZF) erhalten wir zunächst die Werte  $\zeta(-2m) = 0$ .

$$\begin{aligned}
 \zeta(-2m) &= 2^{-2m} \cdot \pi^{-2m-1} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{-2m\pi}{2}\right)}_{=0} \cdot \Gamma(1+2m) \cdot \zeta(1+2m) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Der Sinus-Faktor verschwindet, während alle anderen Faktoren ungleich Null sind. Für

die ungeraden negativen Zahlen ergibt sich:

$$\begin{aligned} \zeta(-(2m-1)) &= 2^{-(2m-1)} \cdot \pi^{-(2m-1)-1} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{-(2m-1)\pi}{2}\right)}_{=(-1)^m} \cdot \underbrace{\Gamma(1+(2m-1))}_{=(2m+1)!} \cdot \underbrace{\zeta(1+(2m-1))}_{=\frac{(-1)^{m-1}}{2} \frac{(2\pi)^{2m}}{(2m)!} B_{2m}} \\ &= -\frac{B_{2m}}{2m} \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 2.39.** Für  $m = 1$  nimmt die Zeta-Funktion also folgenden Wert an:

$$\zeta(-1) = -\frac{B_2}{2} = -\frac{1}{12}$$

Der indische Mathematiker Srinivasa Ramanujan nahm dies 1910 zum Anlass für einen Artikel im Journal of the Indian Mathematical Society mit der Behauptung

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n = -\frac{1}{12}$$

Dies ergibt sich, wenn in die Reihendarstellung der Zeta-Funktion unbedacht der Wert  $s = -1$  eingegeben wird. Zur Ehrenrettung von Ramanujan sei erwähnt, dass trotz Ablehnung vieler Mathematiker sich daraus eine fruchtbare Zusammenarbeit mit Godfrey Harold Hardy entwickelt hat.

## 2.6 Laurent-Entwicklung der Zeta-Funktion

Der Definitionsbereich der Zeta-Funktion kann auf die ganze komplexe Zahlenebene mit Ausnahme der 1 erweitert werden. An der Stelle  $s = 1$  hat die Zeta-Funktion einen einfachen Pol mit Residuum 1. Damit ist die Zeta-Funktion eine meromorphe Funktion und hat eine Darstellung als Laurent Reihe. Diese geben wir hier ohne Beweis an.

**Theorem 2.40.** Die Laurent-Reihe der Zeta-Funktion lautet:

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \gamma_n (s-1)^n$$

Dabei werden die Koeffizienten mit den Stieltjes-Konstanten gebildet.

$$\gamma_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^m \frac{(\ln(k))^n}{k} - \frac{(\ln(m))^{n+1}}{n+1} \right)$$

**Bemerkung 2.41.** Die 0-te Stieltjes-Konstante ist die Eulersche  $\gamma$ -Konstante. Denn es gilt nach Definition ( $\gamma_1$ )

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \frac{\ln(m)}{1} \right) \\ &= \gamma \end{aligned}$$

**Bemerkung 2.42.** Die Stieltjes-Konstanten sind eine Verallgemeinerung der Eulerschen  $\gamma$ -Konstanten. Bereits Euler nahm eine Verallgemeinerung der Definition von  $\gamma$  vor, indem  $\ln(n)$  durch das Integral  $\int_1^n \frac{1}{x} dx$  und anstelle von  $\frac{1}{x}$  andere positive, monoton fallende Funktionen gesetzt wurden. Stieltjes verwendete die Funktion  $f(x) = \frac{(\ln(x))^n}{x}$ , die genau auf die Stieltjes Konstanten  $\gamma_n$  führt.

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^m \frac{(\ln(k))^n}{k} - \int_1^m \frac{(\ln(x))^n}{x} dx \right) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^m \frac{(\ln(k))^n}{k} - \left[ \frac{(\ln(x))^{n+1}}{n+1} \right]_1^m \right) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^m \frac{(\ln(k))^n}{k} - \frac{(\ln(m))^{n+1}}{n+1} \right) \\ &= \gamma_n \end{aligned}$$

Die Ausführungen zu Dirichlet-Reihen sind im Abschnitt 2.1.

## 2.7 Nullstellen der Zeta-Funktion

Die Produktdarstellung der Zeta-Funktion (ZP)

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left( 1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1}$$

konvergiert für  $Re(s) > 1$  und in diesem Gebiet gilt  $\zeta(s) \neq 0$ .

Mit Hilfe der Funktionalgleichung (ZF) konnten triviale Nullstellen für  $s = -2n, n \in \mathbb{N}$  gefunden werden. Für  $Re(s) < 0$  gibt es keine weiteren Nullstellen. Denn die rechte Seite der Funktionalgleichung ist ungleich 0 für  $s \neq -2n, n \in \mathbb{N}$ .

Das heisst, dass alle nicht-trivialen Nullstellen der Zeta-Funktion im kritischen Streifen  $0 \leq Re(s) \leq 1$  liegen. Wegen  $\zeta(\bar{s}) = \overline{\zeta(s)}$  liegen diese paarweise symmetrisch zur reellen Achse, das heisst

$$\zeta(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad \zeta(\bar{s}) = 0$$

Aus der Funktionalgleichung folgt im kritischen Streifen  $0 \leq Re(s) \leq 1$  überdies, dass die

nicht-trivialen Nullstellen symmetrisch zu  $Re(s) = \frac{1}{2}$  liegen.

$$\zeta(1-s) = 0 \quad \Rightarrow \quad \zeta(s) = 0$$

Die ersten nicht-trivialen Nullstellen sind

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{1}{2} \pm i \cdot 14,134725141734693790\dots \\ \rho_2 &= \frac{1}{2} \pm i \cdot 21,022039638771554993\dots \\ \rho_3 &= \frac{1}{2} \pm i \cdot 25,010857580145688763\dots \\ \rho_4 &= \frac{1}{2} \pm i \cdot 30,424876125859513210\dots \\ \rho_5 &= \frac{1}{2} \pm i \cdot 32,935061587739189690\dots \\ \rho_6 &= \frac{1}{2} \pm i \cdot 37,586178158825671257\dots \\ &\dots \end{aligned}$$

Tatsächlich konnte Hardy 1914 beweisen, dass auf der kritischen Geraden sogar unendlich viele nicht-triviale Nullstellen der Zeta-Funktion liegen. Bis heute konnten keine nicht-trivialen Nullstellen mit  $Re(\rho) \neq \frac{1}{2}$  gefunden werden.

Bereits im Jahr 1859 formulierte Riemann folgende berühmte Vermutung:

**Theorem 2.43.** *Riemannsche Vermutung*

Alle nicht-trivialen Nullstellen der Zeta-Funktion liegen auf der kritischen Geraden  $Re(s) = \frac{1}{2}$ .

Obwohl sich viele Mathematiker an einem Beweis versucht haben, konnte dieser bis heute nicht erbracht werden. Im Rahmen des 2. Internationalen Mathematikerkongresses im Jahr 1900 in Paris stellte Hilbert eine Liste von 23 mathematischen Problemen auf, darunter die Riemannsche Vermutung als Problem Nummer 8. Gourdon veröffentlichte 2004 einen Artikel, in dem bewiesen wird, dass bis zu  $Im(\rho) < 10^{13}$  keine Nullstelle mit  $Re(\rho) \neq \frac{1}{2}$  existiert.

Die große Bedeutung der Riemannschen Vermutung liegt in ihrem Zusammenhang mit der Primzahlverteilung.

## 2.8 Primzahlverteilung

Die Primzahlen haben natürlich eine große Bedeutung in der Mathematik und Zahlentheorie. Drei wichtige Fragen werden auch heute noch in der Forschung untersucht:

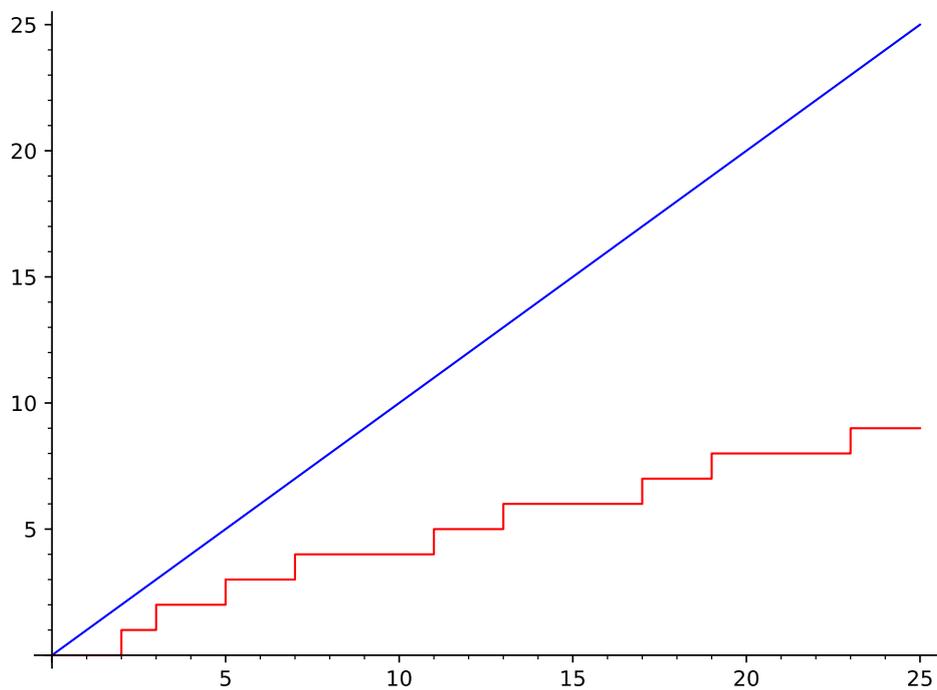
- (1) Ist eine gegebene Zahl eine Primzahl?
- (2) Wieviele Primzahlen gibt es, die kleiner oder gleich einer gegebenen Zahl sind?
- (3) Wie lautet die n-te Primzahl  $p_n$ ?

Zu Frage (2) wird folgende Abzählfunktion definiert:

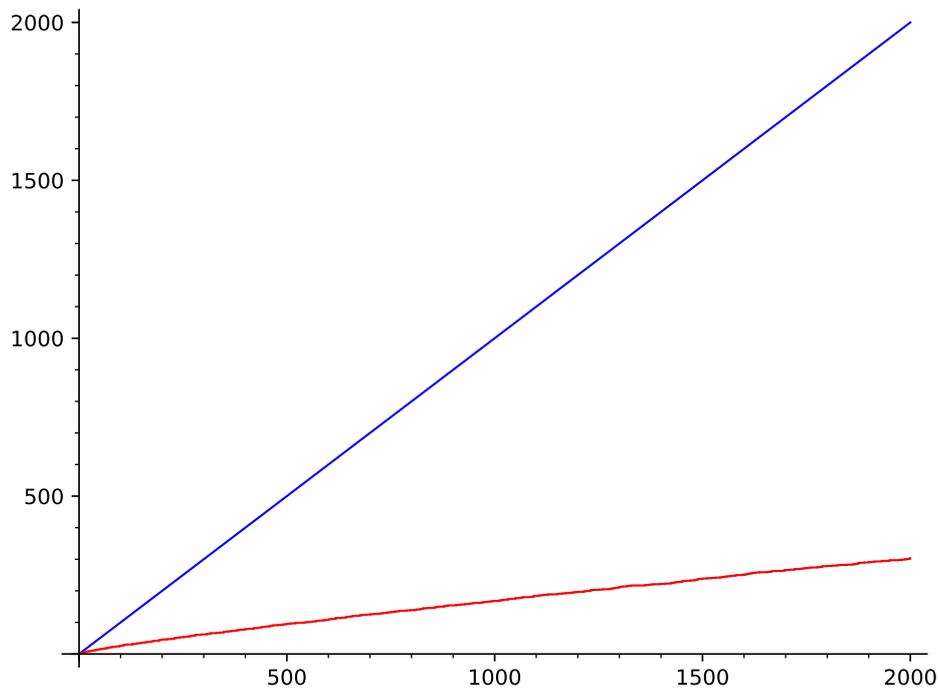
**Definition 2.44.** Die Primzahlfunktion ist für  $x \in \mathbb{R}^+$  definiert durch

$$\pi(x) = \#\{p \leq x \mid p \text{ Primzahl}\}$$

Die folgende Graphik zeigt die Primzahlfunktion bis 25.



In größeren Bereichen ist dagegen die Treppenfunktion nicht mehr so gut erkennbar.



Da der genaue Wert der Primzahlfunktion schwierig zu berechnen ist, hat bereits Gauß eine Abschätzungen gefunden. Diese wurde als Primzahlsatz bekannt und 1895 von Hadamard und de la Vallee Poussin bewiesen.

**Theorem 2.45.** *Primzahlsatz*

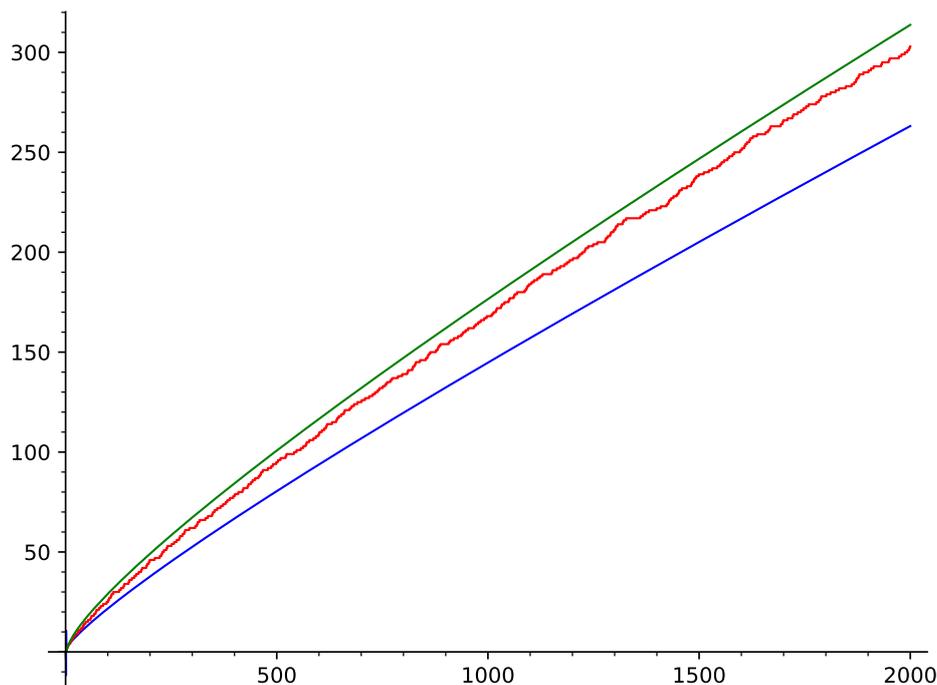
Die Primzahlfunktion ist asymptotisch äquivalent zu  $\frac{x}{\ln(x)}$ . Das heisst in Formeln

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}$$

oder

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln(x)}} = 1$$

Dies wird in folgender Graphik veranschaulicht. Die grüne Linie stellt die verbesserte Abschätzung mit dem Integrallogarithmus  $Li(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln(t)} dt$  dar.



Die Graphik erweckt den Anschein, dass  $Li(x) > \pi(x)$  für alle  $x$  gilt. Littlewood hat jedoch 1914 bewiesen, dass sich die beiden Funktionen ab einem Wert  $x_0$  sogar unendlich oft schneiden. Eine Abschätzung gab Skewes mit

$$x_0 < 10^{10^{10^{34}}}$$

an. Diese Zahl war seinerzeit die größte jemals definierte nützliche Zahl. Bays und Hudson konnten 2000 zeigen, dass die erste Überschneidung bereits vor  $1,39822 \cdot 10^{316}$  stattfindet.

Tatsächlich liefert diese Abschätzung für die Anzahl der Primzahlen bis zu einer gegebenen Zahl  $x$  auch eine Abschätzung für die  $n$ -te Primzahl. Also sind die Fragen (2) und (3) im Grunde äquivalent.

**Korollar 2.46.** Die  $n$ -te Primzahl  $p_n$  ist asymptotisch äquivalent zu  $n \cdot \ln(n)$ .

*Beweis.* Wir müssen zeigen, dass gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \ln(n)}{p_n} = 1$$

Nach dem Primzahlsatz 2.45 gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln(x)}} = 1$$

Daraus folgt für den Logarithmus des Quotienten:

$$\begin{aligned} \ln\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln(x)}}\right) &= \ln(1) = 0 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln(x)}}\right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(\pi(x)) - \ln(x) + \ln(\ln(x))) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\ln(x) \left(\frac{\ln(\pi(x))}{\ln(x)} + \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} - 1\right)\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Da  $\ln(x)$  unbeschränkt ist und mit der de L'Hospital-Regel

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

gilt, folgt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(\pi(x))}{\ln(x)} = 1$$

Multipliziert mit der Formel des Primzahlsatzes erhalten wir

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln(x)}} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(\pi(x))}{\ln(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x) \cdot \ln(\pi(x))}{x} \end{aligned}$$

Nun wird  $x$  durch die  $n$ -te Primzahl  $p_n$  ersetzt, wobei  $\pi(p_n) = n$  gilt. Dann folgt die Behauptung. □

Da die Primzahlfunktion  $\pi(x)$  eine große Bedeutung hat, sind viele Verbesserungen in der Abschätzung erfolgt. Für eine genaue Formel benötigen wir die Riemannsche R-Funktion.

**Definition 2.47.** Die Riemannsche R-Funktion ist definiert durch

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \cdot Li(\sqrt[n]{x})$$

Dabei ist  $\mu$  die Möbius-Funktion aus Definition 2.11 und  $Li$  ist der Integrallogarithmus

$$Li(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln(t)} dt$$

**Theorem 2.48.** Für die Primzahlfunktion gilt die exakte Formel

$$\pi(x) = R(x) - \sum_{\zeta(\rho)=0} R(x^\rho)$$

Dabei wird über alle nicht-trivialen Nullstellen  $\rho$  der Zeta-Funktion summiert.

### 3 Elliptische Funktionen

**Definition 3.1.** Eine meromorphe Funktion

$$f(x) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

heißt elliptisch, wenn  $f$  doppelt periodisch ist. Das heisst, es gibt zwei komplexe Zahlen  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$  mit  $\frac{\omega_2}{\omega_1} \notin \mathbb{R}$ , so dass

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z + \omega_1) \\ &= f(z + \omega_2) \end{aligned}$$

Die Bedingung  $\frac{\omega_2}{\omega_1} \notin \mathbb{R}$  besagt, dass  $\omega_1, \omega_2$  linear unabhängig sind in  $\mathbb{C}$  aufgefasst als 2-dimensionaler Vektorraum über  $\mathbb{R}$ .

**Definition 3.2.** Die Abelsche Gruppe

$$\begin{aligned} \Lambda &= \mathbb{Z} \cdot \omega_1 + \mathbb{Z} \cdot \omega_2 \\ &= \{n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 \in \mathbb{C} \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}, \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C} \text{ linear unabhängig über } \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

heißt Gitter in  $\mathbb{C}$ .

Für eine gegebene, komplexe Zahl  $a \in \mathbb{C}$  heisst die Menge

$$D = \{a + t_1 \omega_1 + t_2 \omega_2 \mid 0 \leq t_1, t_2 < 1\}$$

Fundamental-Parallelogramm oder Fundamental-Masche des Gitters  $\Lambda$ .

Ein Gitter kann mehrere Fundamental-Parallelogramme besitzen.

Für eine elliptische Funktion über einem Gitter  $\Lambda$  gilt

$$f(z + \lambda) = f(z) \quad \text{für alle } \lambda \in \Lambda$$

Das heisst, eine elliptische Funktion ist durch ihre Werte auf einem Fundamental-Parallelogramm vollständig bestimmt.

Der Quotientenraum  $\mathbb{C}/\Lambda = T^2$  ist ein 2-dimensionaler Torus.

**Proposition 3.3.** Die Menge aller elliptischen Funktion über dem Gitter  $\Lambda$  bilden einen Körper  $\mathbb{C}(\Lambda)$ .

*Beweis.* Das neutrale Elemente der Addition (die meromorphe Nullfunktion) und der Multiplikation (die meromorphe Einsfunktion) sind elliptisch und somit Elemente in  $\mathbb{C}(\Lambda)$ . Außerdem ist die Menge der elliptischen Funktionen unter Addition, Multiplikation und der Bildung von additiv und multiplikativ Inversen abgeschlossen.  $\square$

**Beispiel 3.4.** In einem gegebenen Gitter sind für alle  $k \in \mathbb{N}^+$  folgende Funktionen elliptisch:

$$\wp_{\Lambda}^{(k)}(z) = (-1)^k \cdot (k + 1)! \cdot \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z + \omega)^{k+2}}$$

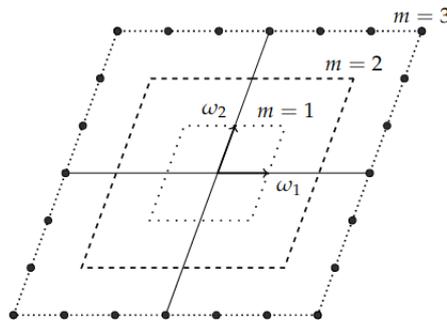
Insbesondere ist

$$\wp_{\Lambda}^{(1)}(z) = -2 \cdot \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z + \omega)^3}$$

Die doppelte Periodizität folgt direkt aus der Gruppeneigenschaft des Gitters.

**Theorem 3.5.** Die Funktionen  $\wp_{\Lambda}^{(k)}(z)$  konvergieren absolut für  $z \notin \Lambda$  und  $k \in \mathbb{N}^+$ .

*Beweis.* Zum Nachweis der Konvergenz betrachten wir für eine natürliche Zahl  $m \in \mathbb{N}$  die Menge der Gitterpunkte in einem Parallelogramm  $P_m(z)$ , das von den vier Gitterpunkten  $z \pm m \cdot \omega_1 \pm m \cdot \omega_2$  aufgespannt wird.



Nun zählen wir die Anzahl der Gitterpunkte auf dem Rand dieser Paralleleogramme:

$$\begin{aligned}
 |P_m(z) \cap \Lambda| &= |\{z \pm m \cdot \omega_1 + a \cdot \omega_2 \mid a \in \mathbb{Z}, -m < a < m\} \uplus \\
 &\quad \{z + a \cdot \omega_1 \pm m \cdot \omega_2 \mid a \in \mathbb{Z}, -m < a < m\} \uplus \\
 &\quad \{z \pm m \cdot \omega_1 \pm m \cdot \omega_2\}| \\
 &= 2(2m - 1) + 2(2m - 1) + 4 \\
 &= 8m
 \end{aligned}$$

Wir bezeichnen das Betragsminimum aller Punkte auf dem ersten Parallelogramm mit  $C = \min\{|\omega| \mid \omega \in P_1(z)\}$ . Dann gilt  $\min\{|\omega| \mid \omega \in P_m(z)\} = mC$ . Das heisst

$$\begin{aligned}
 |\omega| &\geq mC \quad \text{für alle } \omega \in P_m(z) \cap \Lambda \\
 \Rightarrow \frac{1}{|\omega|} &\leq \frac{1}{mC}
 \end{aligned}$$

Damit können wir die Funktionen  $\wp_\Lambda^{(k)}$  wie folgt als Summe über  $m$  umschreiben und abschätzen:

$$\begin{aligned}
 |\wp_\Lambda^{(k)}(z)| &= (k+1)! \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\omega \in P_m(z) \cap \Lambda} \frac{1}{|\omega|^{k+2}} \\
 &\leq (k+1)! \cdot \sum_{m=1}^{\infty} 8 \cdot m \cdot \frac{1}{(mC)^{k+2}} \\
 &= \frac{8}{C^{k+2}} \cdot (k+1)! \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{k+1}}
 \end{aligned}$$

Da für  $k \geq 1$  die Summe  $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{k+1}}$  konvergiert, haben wir eine konvergente Majorante gefunden und die Funktionen  $\wp_\Lambda^{(k)}(z)$  konvergieren absolut.  $\square$

**Proposition 3.6.** Für  $k > 0$  entstehen die Funktionen  $\wp_\Lambda^{(k+1)}(z)$  durch Ableitung von  $\wp_\Lambda^{(k)}(z)$ . Das heisst, es gilt:

$$\wp_\Lambda^{(k)}(z)' = \wp_\Lambda^{(k+1)}(z)$$

*Beweis.* Der Beweis erfolgt durch Nachrechnen.

$$\begin{aligned}
 \wp_{\Lambda}^{(k)}(z)' &= \left( (-1)^k \cdot (k+1)! \cdot \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z+\omega)^{k+2}} \right)' \\
 &= (-1)^k \cdot (k+1)! \cdot \sum_{\omega \in \Lambda} (-1) \cdot (k+2) \cdot \frac{1}{(z+\omega)^{k+3}} \\
 &= (-1)^{k+1} \cdot ((k+1)+1)! \cdot \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z+\omega)^{(k+1)+2}} \\
 &= \wp_{\Lambda}^{(k+1)}(z)
 \end{aligned}$$

□

Damit erhebt sich die Frage, ob es eine Stammfunktion  $\wp_{\Lambda}^{(0)}$  von  $\wp_{\Lambda}^{(1)}$  gibt. Diese Funktion wird nach Weierstraß (1815 - 1897) benannt in Würdigung seiner verdienstvollen Beiträge zur Mathematik insbesondere der Analysis, Funktionentheorie und elliptischen Funktionen. Da er seine Forschungsergebnisse oft zunächst nur mündlich teilweise sogar in seinen Vorlesungen weitergegeben und erst später veröffentlicht hat, ist das Entstehungsdatum der Weierstraßschen  $\wp$ -Funktion nicht bekannt.

**Definition 3.7.** In einem gegebenen Gitter  $\Lambda$  ist die Weierstraßsche  $\wp_{\Lambda}$ -Funktion definiert durch

$$\wp_{\Lambda}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{(z+\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

Da mit  $\omega \in \Lambda$  auch  $-\omega \in \Lambda$  ist, wird die Weierstraßsche Funktion auch häufig so angegeben:

$$\wp_{\Lambda}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

**Theorem 3.8.** Die Weierstraßsche  $\wp_{\Lambda}$ -Funktion ist eine elliptische Funktion.

*Beweis.* Wir müssen zeigen, dass  $\wp_{\Lambda}$  eine meromorphe Funktion und doppelt periodisch ist. Das Gitter  $\Lambda$  werde von  $\omega_1$  und  $\omega_2$  aufgespannt.

Für alle  $z \notin \Lambda$  konvergiert  $\wp_{\Lambda}$ . Denn für eine gegebene Zahl  $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$  befinden sich nur endlich viele Gitterpunkte innerhalb eines Kreises um den Ursprung mit Radius  $3 \cdot |z|$ . Ab einem  $m_0 \in \mathbb{N}$  befinden sich alle Gitterpunkte der Parallelogramme

$$P_m = \pm m \cdot \omega_1 \pm m \cdot \omega_2 \quad \text{für } m \geq m_0$$

ausserhalb dieses Kreises. Die Weierstraßsche Funktion läßt sich damit so schreiben:

$$\wp_{\Lambda}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{m=1}^{m_0} \sum_{\omega \in P_m} \left( \frac{1}{(z+\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) + \sum_{m=m_0}^{\infty} \sum_{\omega \in P_m} \left( \frac{1}{(z+\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

Nun kann die zweite, unendliche Summe wie folgt umgeformt und abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{1}{(z + \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| &= \left| \frac{\omega^2 - (z + \omega)^2}{\omega^2 \cdot (z + \omega)^2} \right| \\
 &= \frac{|\omega| \cdot \left| 2 \cdot z + \frac{z}{\omega} \right|}{|\omega^4| \cdot \left| 1 + \frac{z}{\omega} \right|^2} \\
 &\leq \frac{2 \cdot |z| + \frac{|z|}{|\omega|}}{|\omega^3| \cdot \left| 1 + \frac{z}{\omega} \right|^2} \\
 &\quad \text{Dreiecks Ungleichung im Zähler angewandt} \\
 &\leq \frac{2 \cdot |z| + \frac{|z|}{|\omega|}}{|\omega^3| \cdot \left| 1 - \frac{|z|}{|\omega|} \right|^2} \\
 &\quad \text{Dreiecks Ungleichung im Nenner angewandt}
 \end{aligned}$$

Nun gilt

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot |z| + \frac{|z|}{|\omega|}}{\left| 1 - \frac{|z|}{|\omega|} \right|^2} = 2 \cdot |z|$$

Daraus folgt: es existiert ein  $\omega_0$ , so dass für alle  $\omega > \omega_0$  die Werte der Funktion in der Nähe des Grenzwerts liegen, also etwa

$$\frac{2 \cdot |z| + \frac{|z|}{|\omega|}}{\left| 1 - \frac{|z|}{|\omega|} \right|^2} \leq 3 \cdot |z|$$

Zu diesem  $\omega_0$  gibt es ein  $m_0$ , so dass  $\omega_0 \in P_{m_0}$  gilt.

Wie im Beweis der Konvergenz der Funktionen  $\varphi_\Lambda^{(k)}$  in Theorem 3.5 finden wir nun für die zweite Summe eine konvergente Majorante.

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=m_0}^{\infty} \sum_{\omega \in P_m} \left( \left| \frac{1}{(z + \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| \right) &\leq \sum_{m=m_0}^{\infty} 8 \cdot m \cdot \frac{3 \cdot |z|}{(m \cdot C)^3} \\
 &= \frac{24 \cdot |z|}{C^3} \cdot \sum_{m=m_0}^{\infty} \frac{1}{m^2}
 \end{aligned}$$

Denn für alle  $\omega \in P_m$  gilt mit  $C = \min\{|\omega_1|, |\omega_2|\}$

$$\begin{aligned}
 |\omega| &\geq m \cdot C \\
 \Rightarrow \frac{1}{|\omega|} &\leq \frac{1}{m \cdot C}
 \end{aligned}$$

Zum Nachweis der Periodizität berechnen wir die Ableitung von  $\wp_\Lambda(z)$ .

$$\begin{aligned} (\wp_\Lambda(z))' &= \left( \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{(z+\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \right)' \\ &= (-2) \frac{1}{z^3} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} (-2) \left( \frac{1}{(z+\omega)^3} \right) \\ &= (-2) \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z+\omega)^3} \\ &= \wp_\Lambda^{(1)}(z) \end{aligned}$$

Da  $\wp_\Lambda^{(1)}(z)$  periodisch ist, folgt

$$\begin{aligned} (\wp_\Lambda(z+\omega))' - (\wp_\Lambda(z))' &= 0 \\ \Rightarrow \wp_\Lambda(z+\omega) - \wp_\Lambda(z) &= c(\omega) \quad \text{konstant} \end{aligned}$$

Nun beachtet man, dass  $\wp_\Lambda$  eine gerade Funktion ist und setzt  $z = -\frac{\omega}{2}$ . Dann folgt

$$0 = \wp_\Lambda\left(\frac{\omega}{2}\right) - \wp_\Lambda\left(-\frac{\omega}{2}\right) = c(\omega)$$

□

### 3.1 Liouvillesche Sätze

Zur Erinnerung führen wir hier einige Begriffe und Ergebnisse der Funktionentheorie auf.

#### **Theorem 3.9.** Integralsatz von Cauchy

Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet und  $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$  eine geschlossene Kurve in  $U$ . Dann gilt für jede holomorphe Funktion  $f$  auf  $U$ :

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Insbesondere gilt dies für den Rand von  $U$  also:

$$\oint_{\partial U} f(z) dz = 0$$

**Definition 3.10.** Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet und  $f: U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion mit einer isolierten Singularität in  $z_0 \in U$ . Dann ist das

Residuum von  $f$  in  $z_0$  definiert als

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial U} f(z) dz$$

**Theorem 3.11.** Integralformel von Cauchy

Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion auf  $D$ . Für jeden Punkt  $a \in D$  sei  $U$  die Kreisscheibe

$$U = U_r(a) = \{ z \mid |z - a| < r \} \subset D$$

komplett in  $D$  gelegen. Dann gilt für alle  $z \in U$

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial U} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \\ &= \operatorname{res}_{z_0} \frac{f(z)}{z - z_0} \end{aligned}$$

Dabei ist der Rand von  $U$  der positiv orientierte Kreis

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto a + r \cdot e^{it} \end{aligned}$$

**Theorem 3.12.** Theorem von Liouville

Eine beschränkte, holomorphe Funktion auf  $\mathbb{C}$  ist konstant.

*Beweis.* Zum Beweis wenden wir die Integralformel von Cauchy auf die Ableitung der Funktion an.

$$\begin{aligned} |f'(z)| &= \left| \frac{d}{dz} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D_\epsilon(z)} \frac{f(s)}{s - z} ds \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \oint_{\partial D_r(z)} \frac{f(s)}{(s - z)^2} ds \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left| \oint_{\partial D_r(z)} \frac{C}{(s - z)^2} ds \right| \\ &\quad \text{da } |f(s)| \leq C \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \frac{C}{r^2} \\ &\rightarrow 0 \quad \text{für } r \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Also ist die Funktion  $f$  konstant. □

**Korollar 3.13.** Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom  $p(z) \in \mathbb{C}[z]$  mit  $\operatorname{grad}(p) \geq 1$  hat eine Nullstelle.

*Beweis.* Angenommen  $p(z)$  hätte keine Nullstelle, dann ist  $\frac{1}{p(z)}$  eine holomorphe Funktion auf  $\mathbb{C}$ . Wegen

$$\liminf_{|z|} |p(z)| = \infty$$

gibt es ein  $r \in \mathbb{R}$ , so dass  $|p(0)| \leq |p(z)|$  für alle  $|z| > r$ . Auf der kompakten Kreisscheibe  $U_r(0)$  nimmt die stetige Funktion  $|p(z)|$  ihr Minimum  $C = |p(z_0)|$  an. Somit ist die Funktion  $\frac{1}{p(z)}$  durch  $\min\{|\frac{1}{p(0)}|, |\frac{1}{C}|\}$  nach oben beschränkt. Nach dem Satz von Liouville ist  $\frac{1}{p(z)}$  und damit auch  $p(z)$  konstant im Widerspruch zur Voraussetzung  $\text{grad}(p) \geq 1$ .  $\square$

**Definition 3.14.** Die Ordnung einer meromorphen Funktion  $f : U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  an einer Null- oder Polstelle  $z$  ist definiert durch:

$$\text{ord}_z(f) = \begin{cases} k \in \mathbb{N} & \text{falls } z \text{ eine Nullstelle } k\text{-ter Ordnung ist} \\ -k \in \mathbb{N} & \text{falls } z \text{ eine Polstelle } k\text{-ter Ordnung ist} \end{cases}$$

Damit kann nun ein Integral angegeben werden, das die Null- und Polstellen einer meromorphen Funktion zählt.

**Theorem 3.15.** Sei  $f : U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  eine meromorphe Funktion,  $N$  die Menge Nullstellen und  $P$  die Menge der Polstellen von  $f$  in  $U$ . Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial U} \partial^L f(z) dz = \sum_{z \in N \cup P} \text{ord}_z(f)$$

Dabei bezeichnet  $\partial^L$  die logarithmische Ableitung.

*Beweis.* Für jede Null- oder Polstelle  $z \in N \cup P$  kann die Funktion  $f$  geschrieben werden als:

$$f(s) = (s - z)^{k_z} \cdot g_z(s)$$

Dabei ist  $k_z = \text{ord}_z(f)$  und  $g_z$  eine holomorphe Funktion mit  $g_z(z) \neq 0$ . Die logarithmische Ableitung ergibt sich daraus zu

$$\begin{aligned} \partial^L f(z) &= \frac{d}{ds} (\ln(s - z)^{k_z} \cdot g_z(s)) \\ &= k_z \cdot \frac{1}{s - z} + \frac{g'_z(s)}{g_z(s)} \end{aligned}$$

Die Randkurve von  $U$  kann durch Stege zu kleinen Kreisen um die Null- und Polstellen erweitert werden. Da die Stege zweimal in verschiedenen Richtungen durchlaufen werden, heben sich deren Beiträge zum Randintegral weg. Das Randintegral ergibt sich

dann zu:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial U} \partial^L f(s) ds &= \sum_{z \in N \cup P} \oint_{\partial D_\epsilon(z)} \left( k_z \cdot \frac{1}{s-z} + \frac{g'_z(s)}{g_z(s)} \right) ds \\ &= \sum_{z \in N \cup P} 2\pi i \cdot k_z \\ &= 2\pi i \sum_{z \in N \cup P} \text{ord}_z(f) \end{aligned}$$

Denn die holomorphen Funktionen  $\frac{g'_z(s)}{g_z(s)}$  liefern keinen Beitrag. □

Der Satz von Liouville kann insbesondere auf elliptische Funktionen angewendet werden.

**Theorem 3.16.** Sätze von Liouville für elliptische Funktionen

- (1) Eine elliptische Funktion ohne Polstellen ist konstant.
- (2) Eine elliptische Funktion ohne Nullstellen ist konstant.
- (3) Für eine elliptische Funktion  $f$  ohne Null- oder Polstellen auf dem Rand einer Fundamental-Masche  $M$  gilt:

$$\oint_{\partial M} f(s) ds = 0$$

*Anmerkung:* Da es innerhalb einer Fundamental-Masche nur endlich viele Polstellen gibt, kann man durch eine kleine Verschiebung immer eine Fundamental-Masche finden, auf deren Rand sich keine Polstellen befinden.

- (4) Für eine elliptische Funktion  $f$  ohne Null- oder Polstellen auf dem Rand einer Fundamental-Masche  $M$  gilt:

$$\sum_{z \in M} \text{res}_z(f) = 0$$

- (5) Für eine elliptische Funktion  $f$  ohne Null- oder Polstellen auf dem Rand einer Fundamental-Masche  $M$  stimmt die Zahl der Nullstellen ( $N$ ) mit der Zahl der Polstellen ( $P$ ) überein.

$$\sum_{z \in N \cap M} \text{ord}_z(f) = \sum_{z \in P \cap M} \text{ord}_z(f)$$

(6) Für eine elliptische Funktion  $f$  ohne Null- oder Polstellen auf dem Rand einer Fundamental-Masche  $M$  gilt

$$\sum_{z \in M} \text{ord}_z(f) = 0$$

(7) Eine elliptische Funktion  $f$ , die nicht konstant ist, hat mindestens zwei Pole (mit ihrer Ordnung gezählt) in jeder Fundamental-Masche.

*Beweis.*

ad (1) Da eine Fundamental-Masche  $M$  einer elliptischen Funktion  $f$  kompakt ist, ist  $f$  auf  $M$  beschränkt. Wegen der Periodizität folgt die Beschränkung auch für ganz  $\mathbb{C}$  und damit nach dem Satz von Liouville 3.12 die Konstanz von  $f$ .

ad (2) Wenn  $f$  keine Nullstellen hat, dann hat  $\frac{1}{f}$  keine Polstellen und ist nach Aussage (1) konstant.

ad (3) Die Funktionswerte einer elliptischen Funktion  $f$  stimmen auf gegenüber liegenden Seiten einer Fundamental-Masche überein. Gegenüber liegende Seiten werden beim Randintegral in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen. Daher heben sich deren Beiträge auf und das Randintegral ist Null.

$$\oint_{\partial M} f(s) ds = 0$$

ad (4) Nach Definition des Residuums 3.10

$$\text{res}_{z_0} f = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial M} f(s) ds$$

folgt die Aussage direkt aus (3).

ad (5) Mit einer elliptischen Funktion  $f$  sind auch die Funktionen  $f'$  und  $\partial^L f = \frac{f'}{f}$  elliptisch. Nach Theorem 3.15 zählt das Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial M} \partial^L f(z) dz = \sum_{z \in N \cup P} \text{ord}_z(f)$$

in einer Fundamental-Masche  $M$  die Anzahl der Null- und Polstellen in ihrer jeweiligen Ordnung. Nach Aussage (4) ist dieses Randintegral Null.

ad (6) Die Aussage folgt direkt aus Aussagen (4) und (5).

ad (7) Da das Residuum einer einfachen Polstelle nicht Null ist, folgt die Aussage direkt aus Aussage (4).

□

**Definition 3.17.** Für eine elliptische Funktion  $f$  auf dem Gitter  $\Lambda$  ist die Ordnung definiert durch die Anzahl der Nullstellen von  $f$  in einer Fundamental-Masche.

$$\text{Ord}(f) = \sum_{z \in N \cap M} \text{ord}_z(f)$$

Nach obigem Theorem ist die Ordnung von  $f$  auch die Anzahl der Polstellen in einer Fundamental-Masche.

**Bemerkung 3.18.** Es gibt elliptische Funktionen mit zwei einfachen Polen. Diese gehören zur Familie der Jacobischen elliptischen Funktionen.

Die Weierstraßsche  $\wp$ -Funktion hat nach Definition 3.7 einen Pol zweiter Ordnung und ist damit eine elliptische Funktion mit kleinstmöglicher Ordnung. Sie ist auch die "Urmutter" aller elliptischen Funktionen wie wir später erläutern werden. Als meromorphe Funktion kann  $\wp$  durch eine Laurent Reihe dargestellt werden. Dazu benötigen wir den Begriff der Eisenstein-Reihen.

## 3.2 Eisenstein-Reihen

**Definition 3.19.** In einem Gitter  $\Lambda$  sind die Eisenstein-Reihen definiert durch

$$G_n = \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^n} \quad \text{für } n \geq 3$$

**Proposition 3.20.** Die Eisenstein-Reihen  $G_n$  konvergieren absolut für  $n \geq 3$ .

*Beweis.* Wie im Beweis der Konvergenz der Ableitungen der Weierstraßschen  $\wp$ -Funktion in Theorem 3.5 vergrößern wir eine Fundamental-Masche um den Ursprung zu Parallelogrammen  $P_m$ . Auf den  $8m$  Gitterpunkten des Parallelogramms  $\omega \in P_m \cap \Lambda$  gilt die Abschätzung

$$|\omega| \geq m \cdot \min\{|\omega_1|, |\omega_2|\} = m \cdot r$$

Damit kann die Eisenstein-Reihe  $G_n$  für  $n \geq 3$  wie folgt abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{|\omega|^n} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\omega \in P_m \cap \Lambda} \frac{1}{|\omega|^n} \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8m}{(mr)^n} \\ &= \frac{8}{r^n} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{n-1}} \end{aligned}$$

Für  $n \geq 3$  ist also eine konvergente Majorante gefunden und die Eisenstein-Reihe absolut konvergent. □

**Proposition 3.21.** *Eisenstein-Reihen  $G_{2k+1}$  mit ungeradem Index sind Null.*

*Beweis.* Wir rechnen:

$$\begin{aligned} 2 \cdot G_{2k+1} &= 2 \cdot \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^{2k+1}} \\ &= \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^{2k+1}} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{(-\omega)^{2k+1}} \\ &= \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{\omega^{2k+1}} - \frac{1}{\omega^{2k+1}} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

**Theorem 3.22.** *Die Laurent-Reihe für die Weierstraßsche  $\wp$ -Funktion lautet:*

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \cdot G_{2n+2} \cdot z^{2n}$$

*Beweis.* Für  $|z| < |\omega|$  ist  $|\frac{z}{\omega}| < 1$  und folgende geometrische Reihen sind konvergent:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n \left( \frac{z}{\omega} \right)^n &= \frac{\left( \frac{z}{\omega} \right)}{\left( 1 - \frac{z}{\omega} \right)^2} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{z}{\omega} \right)^n &= \frac{1}{\left( 1 - \frac{z}{\omega} \right)} - 1 \end{aligned}$$

Die Addition dieser beiden Reihen ergibt:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \left(\frac{z}{\omega}\right)^n &= \frac{\left(\frac{z}{\omega}\right)}{\left(1 - \frac{z}{\omega}\right)^2} + \frac{1}{\left(1 - \frac{z}{\omega}\right)} - 1 \\ &= \frac{1}{\left(1 - \frac{z}{\omega}\right)^2} - 1 \\ &= \omega^2 \cdot \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right) \end{aligned}$$

Dies setzen wir nun umgekehrt in die Formel für die Weierstraßsche  $\wp$ -Funktion ein:

$$\begin{aligned} \wp(z) &= \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right) \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{\omega^2} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \left(\frac{z}{\omega}\right)^n\right) \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \cdot z^n \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^{(n+2)}} \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \cdot G_{n+2} \cdot z^n \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1) \cdot G_{2k+2} \cdot z^{2k} \end{aligned}$$

Denn die Eisenstein-Reihen mit ungeradem Index sind Null ( $G_{2k+1} = 0$ ). □

Die Laurent-Reihe beginnt also mit

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + 3 \cdot G_4 \cdot z^2 + 5 \cdot G_6 \cdot z^4 + 7 \cdot G_8 \cdot z^6 + \dots$$

### 3.3 Differentialgleichung für die Weierstraßsche $\wp$ -Funktion

**Theorem 3.23.** Für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$  erfüllt die Weierstraßsche  $\wp$ -Funktion die Differentialgleichung

$$\wp'^2(z) = 4 \cdot \wp(z)^3 - 60 \cdot G_4 \cdot \wp(z) - 140 \cdot G_6 \tag{DW}$$

*Beweis.* Die ersten Summanden der Laurent-Reihe sind

$$\wp(z) = z^{-2} + 3 \cdot G_4 \cdot z^2 + 5 \cdot G_6 \cdot z^4 + \dots$$

Daraus ergibt sich

$$\wp(z)^3 = z^{-6} + 9 \cdot G_4 \cdot z^{-2} + 15 \cdot G_6 + \dots$$

Für die Ableitung ergibt sich:

$$\begin{aligned}\wp'(z) &= -2z^{-3} + 6 \cdot G_4 z + 20 \cdot G_6 \cdot z^3 + \dots \\ \wp'(z)^2 &= 4 \cdot z^{-6} - 24 \cdot G_4 \cdot z^{-2} - 80 \cdot G_6 + \dots\end{aligned}$$

Wir betrachten nun die Funktion

$$\begin{aligned}f(z) &= \wp'(z)^2 - 4 \cdot \wp(z)^3 + 60 \cdot G_4 \cdot \wp(z) + 140 \cdot G_6 \\ &= 4 \cdot z^{-6} - 24 \cdot G_4 \cdot z^{-2} - 80 \cdot G_6 + \dots \\ &\quad - 4 \cdot z^{-6} - 36 \cdot G_4 \cdot z^{-2} - 60 \cdot G_6 + \dots \\ &\quad + 60 \cdot G_4 \cdot z^{-2} + \dots \\ &\quad + 140 \cdot G_6 \\ &= 0 + \dots\end{aligned}$$

Die Funktion  $f(z)$  ist holomorph, hat also keine Polstellen und  $z = 0$  ist eine Nullstelle. Da  $f(z)$  elliptisch ist, muss die Funktion nach dem Satz von Liouville 3.16 konstant Null sein.  $\square$

Zur Vereinfachung der Schreibweise hat sich die Definition folgender Konstanten bewährt.

**Definition 3.24.** Sei  $\Lambda \subset \mathbb{C}$  ein Gitter. Wir definieren folgende Gitter-Konstanten:

$$\begin{aligned}g_2 &= 60 \cdot G_4 = \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \omega^{-4} \\ g_3 &= 140 \cdot G_6 = \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \omega^{-6}\end{aligned}$$

und die Diskriminante

$$\Delta(\Lambda) = g_2^3 - 27g_3^2$$

**Theorem 3.25.** Alle höheren Einstein-Reihen  $G_{2m}$  mit  $m \geq 4$  lassen sich als Polynome in  $G_4$  und  $G_6$  mit rationalen Koeffizienten ausdrücken.

$$G_{2m} \in \mathbb{Q}[G_4, G_6]$$

*Beweis.* Zum Beweis wird die Laurent-Reihe der Weierstraßschen  $\wp$ -Funktion

$$\begin{aligned}\wp(z) &= \frac{1}{z^2} + \sum_{m=1}^{\infty} (2m+1) \cdot G_{2m+2} \cdot z^{2m} \\ \wp'(z) &= -\frac{2}{z^3} + \sum_{m=1}^{\infty} (2m+1) \cdot 2m \cdot G_{2m+2} \cdot z^{2m-1} \\ \wp''(z) &= \frac{6}{z^4} + \sum_{m=1}^{\infty} (2m+1) \cdot 2m \cdot (2m-1) \cdot G_{2m+2} \cdot z^{2m-2}\end{aligned}$$

in die abgeleitete Differentialgleichung (DW) eingesetzt.

$$\begin{aligned}\wp'^2 &= 4 \cdot \wp^3 - 60 \cdot G_4 \cdot \wp - 140 \cdot G_6 \\ \Rightarrow 2 \cdot \wp' \cdot \wp'' &= 12 \cdot \wp^2 \cdot \wp' - 60 \cdot G_4 \cdot \wp' \\ \Rightarrow \wp'' &= 6 \cdot \wp^2 - 30 \cdot G_4\end{aligned}$$

Nach dem Einsetzen erhält man

$$\begin{aligned}& \frac{6}{z^4} + \sum_{m=1}^{\infty} (2m+1) \cdot 2m \cdot (2m-1) \cdot G_{2m+2} \cdot z^{2m-2} \\ &= 6 \cdot \left( \frac{1}{z^2} + \sum_{m=1}^{\infty} (2m+1) \cdot G_{2m+2} \cdot z^{2m} \right)^2 - 30 \cdot G_4 \\ \Rightarrow & \frac{6}{z^4} + 3 \cdot 2 \cdot G_4 + \sum_{m=2}^{\infty} (2m+1) \cdot 2m \cdot (2m-1) \cdot G_{2m+2} \cdot z^{2m-2} \\ &= 6 \cdot \left( \frac{1}{z^2} + 3 \cdot G_4 \cdot z^2 + \sum_{m=2}^{\infty} (2m+1) \cdot G_{2m+2} \cdot z^{2m} \right)^2 - 30 \cdot G_4 \\ \Rightarrow & \frac{6}{z^4} + 3 \cdot 2 \cdot G_4 + \sum_{m=2}^{\infty} (2m+1) \cdot 2m \cdot (2m-1) \cdot G_{2m+2} \cdot z^{2m-2} \\ &= 6 \cdot \left( \frac{1}{z^4} + 9 \cdot G_4^2 \cdot z^4 + \left( \sum_{m=2}^{\infty} (2m+1) \cdot G_{2m+2} \cdot z^{2m} \right)^2 + 6 \cdot G_4 + 2 \cdot \left( \sum_{m=2}^{\infty} (2m+1) \cdot G_{2m+2} \cdot z^{2m-2} \right) \right. \\ & \quad \left. + 6 \cdot G_4 \cdot \left( \sum_{m=2}^{\infty} (2m+1) \cdot G_{2m+2} \cdot z^{2m+2} \right) \right) - 30 \cdot G_4 \\ \Rightarrow & \frac{6 \cdot G_4}{z^4} + \sum_{m=2}^{\infty} (2m+1) \cdot 2m \cdot (2m-1) \cdot G_{2m+2} \cdot z^{2m-2} \\ &= 6 \cdot \left( 9 \cdot G_4^2 \cdot z^4 + \left( \sum_{m=2}^{\infty} (2m+1) \cdot G_{2m+2} \cdot z^{2m} \right)^2 + \frac{6 \cdot G_4}{z^4} + 2 \cdot \left( \sum_{m=2}^{\infty} (2m+1) \cdot G_{2m+2} \cdot z^{2m-2} \right) \right. \\ & \quad \left. + 6 \cdot G_4 \cdot \left( \sum_{m=2}^{\infty} (2m+1) \cdot G_{2m+2} \cdot z^{2m+2} \right) \right) - \underline{30 \cdot G_4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \underline{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot G_6 \cdot z^2} + 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot G_8 \cdot z^4 + \sum_{m=4}^{\infty} (2m+1) \cdot 2m \cdot (2m-1) \cdot G_{2m+2} \cdot z^{2m-2} \\
 &= 54 \cdot G_4^2 \cdot z^4 + 6 \cdot \left( \sum_{m=2}^{\infty} (2m+1) \cdot G_{2m+2} \cdot z^{2m} \right)^2 \\
 &\quad + 12 \cdot \left( \underline{5 \cdot G_6 \cdot z^2} + 7 \cdot G_8 \cdot z^4 + \sum_{m=4}^{\infty} (2m+1) \cdot G_{2m+2} \cdot z^{2m-2} \right) \\
 &\quad + 36 \cdot G_4 \cdot \left( \sum_{m=2}^{\infty} (2m+1) \cdot G_{2m+2} \cdot z^{2m+2} \right) \\
 &\Rightarrow 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot G_8 \cdot z^4 + \sum_{m=4}^{\infty} (2m+1) \cdot 2m \cdot (2m-1) \cdot G_{2m+2} \cdot z^{2m-2} \\
 &= (54 \cdot G_4^2 + 12 \cdot 7 \cdot G_8) \cdot z^4 + 6 \cdot \left( \sum_{n=4}^{\infty} \left( \sum_{r=2}^{n-2} (2r+1) \cdot (2n-2r-1) \cdot G_{2r+2} \cdot G_{2n-2r+2} \right) \cdot z^{2n} \right) \\
 &\quad + 12 \cdot \sum_{m=4}^{\infty} (2m+1) \cdot G_{2m+2} \cdot z^{2m-2} \\
 &\quad + 36 \cdot \sum_{m=2}^{\infty} (2m+1) \cdot G_4 \cdot G_{2m+2} \cdot z^{2m+2} \\
 &\Rightarrow 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot G_{10} \cdot z^6 + \sum_{m=5}^{\infty} (2m+1) \cdot 2m \cdot (2m-1) \cdot G_{2m+2} \cdot z^{2m-2} \\
 &= (3 \cdot G_4^2 - 7 \cdot G_8) \cdot z^4 + 6 \cdot \left( \sum_{m=5}^{\infty} \left( \sum_{r=2}^{m-3} (2r+1) \cdot (2m-2r-1) \cdot G_{2r+2} \cdot G_{2m-2r} \right) \cdot z^{2m-2} \right) \\
 &\quad + (12 \cdot 9 \cdot G_{10} + 36 \cdot 5 \cdot G_4 \cdot G_6) \cdot z^6 \\
 &\quad + \sum_{m=5}^{\infty} \left( 12 \cdot (2m+1) \cdot G_{2m+2} + 36 \cdot (2m-3) \cdot G_4 \cdot G_{2m-2} \right) \cdot z^{2m-2} \\
 &\Rightarrow \sum_{m=5}^{\infty} (2m+1) \cdot 2m \cdot (2m-1) \cdot G_{2m+2} \cdot z^{2m-2} \\
 &= (3 \cdot G_4^2 - 7 \cdot G_8) \cdot z^4 \\
 &\quad + ((12 \cdot 9 - 9 \cdot 8 \cdot 7) \cdot G_{10} + 36 \cdot 5 \cdot G_4 \cdot G_6) \cdot z^6 \\
 &\quad + \left( \sum_{m=5}^{\infty} \left( 6 \left( \sum_{r=2}^{m-3} (2r+1) \cdot (2m-2r-1) \cdot G_{2r+2} \cdot G_{2m-2r} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 12 \cdot (2m+1) \cdot G_{2m+2} + 36 \cdot (2m-3) \cdot G_4 \cdot G_{2m-2} \right) \cdot z^{2m-2} \right)
 \end{aligned}$$

Die Beiträge von  $\frac{1}{z^2}$ ,  $z^0$ ,  $z^2$  fallen weg und die Sonderfälle  $z^4$ ,  $z^6$  ergeben:

$$G_8 = \frac{3}{7} G_4^2$$

$$G_{10} = \frac{5}{11} G_4 \cdot G_6$$

Für  $m \geq 5$  ergibt sich durch Koeffizientenvergleich folgende Rekursionsformel für die

Eisenstein-Reihen

$$(2m+1) \cdot (2m \cdot (2m-1) - 12) \cdot G_{2m+2} = 6 \left( \sum_{r=2}^{m-3} (2r+1) \cdot (2m-2r-1) \cdot G_{2r+2} \cdot G_{2m-2r} \right) + \underline{36 \cdot (2m-3) \cdot G_4 \cdot G_{2m-2}}$$

Der unterstrichene Term kann als erster und letzter Summand in die Summe gezogen werden. Gekürzt und mit  $m \cdot (2m-1) - 6 = (m-2) \cdot (2m+3)$  ergibt sich die Rekursionsformel

$$(2m+1) \cdot (m-2) \cdot (2m+3) \cdot G_{2m+2} = 3 \sum_{r=1}^{m-2} (2r+1) \cdot (2m-2r-1) \cdot G_{2r+2} \cdot G_{2m-2r}$$

Die Eisenstein-Reihen auf der linken Seite haben stets einen höheren Index als die Eisenstein-Reihen in der Summe auf der rechten Seite. Also lassen sich alle Eisenstein-Reihen  $G_{2m+2}$  für  $m \geq 4$  durch rationale Polynome aus Eisenstein-Reihen mit kleinerem Index ausdrücken. □

Die Formeln für die weiteren Eisenstein-Reihen ab  $G_{12}$  lauten:

$$\begin{aligned} m=5 \Rightarrow 11 \cdot 3 \cdot 13 \cdot G_{12} &= 3 \cdot (3 \cdot 7 \cdot G_4 \cdot G_8 + 5 \cdot 5 \cdot G_6^2 + 7 \cdot 3 \cdot G_8 \cdot G_4) \\ &\quad \text{mit } G_8 = \frac{3}{7} G_4^2 \\ \Rightarrow G_{12} &= \frac{1}{143} (18 \cdot G_4^3 + 25 \cdot G_6^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m=6 \Rightarrow 13 \cdot 4 \cdot 15 \cdot G_{14} &= 3 \cdot (3 \cdot 9 \cdot G_4 \cdot G_{10} + 5 \cdot 7 \cdot G_6 \cdot G_8 + 7 \cdot 5 \cdot G_8 \cdot G_6 + 9 \cdot 3 \cdot G_{10} \cdot G_4) \\ &\quad \text{mit } G_8 = \frac{3}{7} G_4^2 \\ &\quad \text{und } G_{10} = \frac{5}{11} G_4 \cdot G_6 \\ \Rightarrow G_{14} &= \frac{30}{143} G_4^2 \cdot G_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m=7 \Rightarrow 15 \cdot 5 \cdot 17 \cdot G_{16} &= 3 \cdot (3 \cdot 11 \cdot G_4 \cdot G_{12} + 5 \cdot 9 \cdot G_6 \cdot G_{10} \\ &\quad + 7 \cdot 7 \cdot G_8^2 + 9 \cdot 5 \cdot G_{10} \cdot G_6 + 11 \cdot 3 \cdot G_{12} \cdot G_4) \\ &\quad \text{mit } G_8 = \frac{3}{7} G_4^2 \\ &\quad \text{und } G_{10} = \frac{5}{11} G_4 \cdot G_6 \\ &\quad \text{und } G_{12} = \frac{1}{143} (18 \cdot G_4^3 + 25 \cdot G_6^2) \\ \Rightarrow G_{16} &= \frac{1}{2431} \cdot (99 \cdot G_4^4 + 300 \cdot G_4 \cdot G_6^2) \end{aligned}$$

Diese können auch mit folgender sagemath Prozedur bestätigt werden.

```

var('z')
var('G4', 'G6', 'G8', 'G10', 'G12', 'G14', 'G16', 'G18')
wp(z) = 1 / z^2 + 3 * G4 * z^2 + 5 * G6 * z^4 + 7 * G8 * z^6
wp(z) = wp(z) + 9 * G10 * z^8 + 11 * G12 * z^10 + 13 * G14 * z^12
wp(z) = wp(z) + 15 * G16 * z^14 + 17 * G18 * z^16
wp1 = wp.diff(z)
wp2 = wp1.diff(z)
fe(z) = wp2(z) - 6 * wp(z) * wp(z) + 30 * G4
fe.simplify_full()

```

**Theorem 3.26.** Sei  $\Lambda \in \mathbb{C}$  ein Gitter, dann ist jede elliptische Funktion ein rationaler Ausdruck der Weierstraßschen  $\wp$ -Funktion und ihrer Ableitung. In Formeln:

$$\mathbb{C}(\Lambda) = \mathbb{C}(\wp, \wp')$$

*Beweis.* Sei  $f(z) \in \mathbb{C}(\Lambda)$  eine elliptische Funktion. Es genügt, die Aussage des Satzes für gerade, elliptische Funktionen zu beweisen. Denn jede Funktion kann in die Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion zerlegt werden.

$$\begin{aligned}
 f(z) &= g(z) + u(z) \quad \text{mit} \\
 g(z) &= \frac{1}{2}(f(z) + f(-z)) \\
 u(z) &= \frac{1}{2}(f(z) - f(-z))
 \end{aligned}$$

Für ungerade Funktionen  $u(z)$  ist  $\wp'(z) \cdot u(z)$  eine gerade Funktion und nach Division durch  $\wp'(z)$  hat  $u(z)$  die gewünschte Darstellung als rationaler Ausdruck der Weierstraßschen  $\wp$ -Funktion und ihrer Ableitung.

Sei also  $f$  eine gerade, elliptische Funktion. Dann gilt für die Ordnungen:

$$\text{Ord}_z(f) = \text{Ord}_{-z}(f) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

Wir zeigen nun, dass die Ordnung von  $f$  in jedem Punkt  $w \in \mathbb{C}$  mit  $2 \cdot w \in \Lambda$  eine gerade Zahl oder 0 ist. Es gilt nämlich für alle Ableitungen von  $f$ :

$$f^{(i)}(z) = (-1)^i f^{(i)}(-z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \quad \text{und für alle } i \in \mathbb{N}$$

Für ungerade  $i \in \mathbb{N}$  und  $w = -w \pmod{\Lambda}$  folgt aus  $f^{(i)}(w) = -f^{(i)}(-w) = -f^{(i)}(w)$ , dass

$f^{(i)}(w) = 0$  ist. Also gilt:

$$2w \in \Lambda \implies \text{Ord}_w(f) \in 2\mathbb{Z}$$

Sei nun  $D$  ein Fundamental-Parallelogramm. In  $D$  definieren wir die Hälfte  $H$ , so dass  $D = H \cup -H$  gilt. In den Punkten  $w \in H$  definieren wir mithilfe der Ordnungen von  $f$ :

$$n_w = \begin{cases} \text{Ord}_w(f) & \text{für } w \neq -w \pmod{\Lambda} \\ \frac{1}{2}\text{Ord}_w(f) & \text{für } w = -w \pmod{\Lambda} \end{cases}$$

Nun betrachten wir die elliptische Funktion

$$g(z) = \prod_{w \in H \setminus \{0\}} (\wp(z) - \wp(w))^{n_w}$$

Da in  $H \setminus \{0\}$  keine Gitterpunkte liegen, gilt  $\wp(w) \neq \infty$ . Die meisten Faktoren sind 1, da  $n_w = 0$  für die meisten  $w$  gilt. Denn  $\wp$  ist eine meromorphe Funktion. Nun vergleichen wir die Polstellen und Nullstellen von  $f$  und  $g$ . In  $H$  haben die Faktoren  $(\wp(z) - \wp(w))$  genau eine 2-fache Polstelle in  $z = 0$ . Also haben sie 2 einfache Nullstellen in  $D = H \cup (-H)$ . Diese sind  $z_1 = w, z_2 = -w$ . Außer für  $z = w = 0$  haben also  $g(z)$  und  $f(z)$  die gleichen Polstellen und Nullstellen mit denselben Ordnungen. Nun wenden wir Satz 3.16 an, nach dem gilt:

$$\sum_{w \in \mathbb{C}/\Lambda} \text{Ord}_w(\text{elliptische Funktion}) = 0$$

Es folgt, dass  $g(z)$  und  $f(z)$  auch dieselbe Ordnung in  $z = w = 0$  haben und dass  $\frac{f(z)}{g(z)}$  eine holomorphe Funktion ohne Nullstellen also konstant ist. Daher kann  $f(z)$  als rationale Funktion der Weierstraßschen  $\wp$ -Funktion dargestellt werden:

$$f(z) = c \cdot g(z) = c \cdot \prod_{w \in H \setminus \{0\}} (\wp(z) - \wp(w))^{n_w}$$

□

### 3.4 Halbwerte der Weierstraßschen $\wp$ -Funktion

**Definition 3.27.** Sei  $\Lambda = \omega_1 \cdot \mathbb{Z} + \omega_2 \cdot \mathbb{Z}$  ein Gitter in  $\mathbb{C}$  und  $\wp_\Lambda$  die Weierstraßsche  $\wp$ -Funktion des Gitters. Dann sind die Halbwerte der  $\wp$ -Funktion definiert durch:

$$\begin{aligned} e_1 &= \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right) \\ e_2 &= \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right) \\ e_3 &= \wp\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) \end{aligned}$$

**Theorem 3.28.** Die Halbwerte der Weierstraßschen  $\wp$ -Funktion sind verschiedene Nullstellen des Polynoms  $f(y) = 4 \cdot y^3 - g_2 \cdot y - g_3$ . Das heisst, es gilt:

$$4 \cdot \wp(z)^3 - g_2 \cdot \wp(z) - g_3 = 4 \cdot (\wp(z) - e_1) \cdot (\wp(z) - e_2) \cdot (\wp(z) - e_3)$$

Dabei sind  $g_2$  und  $g_4$  die Gitter-Konstanten von  $\Lambda$ .

*Beweis.* Sei  $\{\omega_1, \omega_2\} \subset \Lambda$  eine Basis des Gitters  $\Lambda$  und  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ . Da  $\wp'(z)$  ungerade und elliptisch ist, gilt für  $i \in \{1, 2, 3\}$

$$\begin{aligned} \wp'\left(\frac{\omega_i}{2}\right) &= -\wp'\left(-\frac{\omega_i}{2}\right) \quad \text{da } \wp' \text{ ungerade} \\ &= -\wp'\left(\omega_i - \frac{\omega_i}{2}\right) \quad \text{da } \wp' \text{ periodisch} \\ &= -\wp'\left(\frac{\omega_i}{2}\right) \\ \Rightarrow \wp'\left(\frac{\omega_i}{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Nun setzen wir  $y = \wp\left(\frac{\omega_i}{2}\right)$  in das Polynom  $f$  ein.

$$\begin{aligned} f\left(\wp\left(\frac{\omega_i}{2}\right)\right) &= 4\wp\left(\frac{\omega_i}{2}\right)^3 - g_2\wp\left(\frac{\omega_i}{2}\right) - g_3 \\ &= \wp'\left(\frac{\omega_i}{2}\right)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Die Nullstellen des Polynoms  $f$  sind also  $\{\wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right), \wp\left(\frac{\omega_3}{2}\right)\}$ .

Nun muss noch gezeigt werden, dass diese 3 Nullstellen paarweise verschieden sind. Dazu betrachten wir die Funktion

$$g_1(z) = \wp(z) - \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right)$$

Die Funktion  $g_1(z)$  ist wie die Weierstraßsche  $\wp$ -Funktion elliptisch und gerade, hat genau eine Nullstelle für  $z = \frac{\omega_1}{2}$  und eine zweifache Polstelle für  $z = 0$  und keine weitere Polstelle. Wie im Beweis zu Satz 3.16 gezeigt, gilt für alle  $\omega$  mit  $2 \cdot \omega \in \Lambda$

$$\text{ord}_\omega(g_1) \in 2 \cdot \mathbb{Z}$$

Daher muss die Ordnung der Nullstelle von  $g_1(z)$  in  $\frac{\omega_1}{2}$  gerade sein.

Wir betrachten nun die Funktion  $g(z)$  in einer verschobenen Fundamental-Masche

$$M = \omega_1 \cdot \mathbb{Z} - \frac{3}{4} \omega_1 + \omega_2 \cdot \mathbb{Z} - \frac{3}{4} \omega_2$$

In dieser Fundamental-Masche liegen die Punkte

$$\begin{aligned} 0 &\in M \\ \frac{\omega_1}{2} &\in M \\ \frac{\omega_2}{2} &\in M \\ \frac{\omega_3}{2} &\in M \end{aligned}$$

Da  $g_1(z)$  eine zweifache Polstelle in  $z = 0$  und eine Nullstelle mit gerader Ordnung in  $z = \frac{\omega_1}{2}$  hat, muss diese Nullstelle genau die Ordnung 2 haben, denn nach Satz 3.16 gilt  $\sum_{z \in M} \text{ord}_z(g) = 0$ .

Wäre nun  $\wp(\frac{\omega_1}{2}) = \wp(\frac{\omega_2}{2})$  dann gälte

$$\begin{aligned} g_1\left(\frac{\omega_2}{2}\right) &= \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right) - \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right) \\ &= \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right) - \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

im Widerspruch dazu, dass  $g_1(z)$  keine weitere Nullstelle neben  $z = \frac{\omega_1}{2}$  haben kann. Analoge Betrachtungen mit  $g_2(z) = \wp(z) - \wp(\frac{\omega_2}{2})$  und  $g_3(z) = \wp(z) - \wp(\frac{\omega_3}{2})$  zeigen, dass die Halbwerte  $e_1 = \wp(\frac{\omega_1}{2})$ ,  $e_2 = \wp(\frac{\omega_2}{2})$  und  $e_3 = \wp(\frac{\omega_3}{2})$  paarweise verschieden sind.  $\square$

**Korollar 3.29.** Die Diskriminante eines Gitters  $\Lambda$  mit den Gitter-Konstanten  $g_2$  und  $g_3$  ist nicht Null.

$$\Delta(\Lambda) = g_2^3 - 27 \cdot g_3^2 \neq 0$$

*Beweis.* Das Polynom

$$f(y) = 4 \cdot y^3 - g_2 \cdot y - g_3$$

hat nach obigem Theorem 3 verschiedene Nullstellen. Daher ist die Diskriminante  $g_2^3 - 27 \cdot g_3^2 \neq 0$ .  $\square$

### 3.5 Namensgebung elliptische Funktionen

In diesem Abschnitt wird erläutert, wie die elliptischen Funktionen ihren Namen bekamen. Dieser geht auf die Berechnung der Bogenlänge auf einer Ellipse aus. Der Einfachheit halber sei eine Halbachse der Ellipse 1 und die andere mit  $a$  bezeichnet. Dann lautet die Gleichung der Ellipse mit dem Ursprung als Mittelpunkt:

$$x^2 + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Da es anders als beim Kreis keine rationale Parametrisierung gibt, verwenden wir hier eine Parametrisierung mit dem Ursprungswinkel  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= \cos(\varphi) \\ y(\varphi) &= \sin(\varphi) \end{aligned}$$

Die Bogenlänge von 0 bis  $\varphi_0$  berechnet sich dann zu:

$$\begin{aligned} L_0 &= \int_0^{\varphi_0} \sqrt{x'^2 + y'^2} d\varphi \\ &= \int_0^{\varphi_0} \sqrt{\sin^2(\varphi) + a^2 \cdot \cos^2(\varphi)} d\varphi \end{aligned}$$

Mit der Substitution

$$\begin{aligned} u &= \sin(\varphi) \\ \frac{du}{d\varphi} &= \cos(\varphi) \\ d\varphi &= \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \end{aligned}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} L_0 &= \int_0^{u_0} \sqrt{\frac{u^2 + a^2 \cdot (1-u^2)}{1-u^2}} du \\ &= \int_0^{u_0} \sqrt{\frac{1-k^2 \cdot u^2}{1-u^2}} du \end{aligned}$$

Dabei ist

$$k^2 = 1 - \frac{1}{a^2} \leq 1$$

der elliptische Modul. Dies ist ein elliptisches Integral 2. Art. Für  $a = 1$  oder  $k = 0$  erhält man einen Kreis  $K$  und für die Bogenlänge gibt es eine Stammfunktion.

$$\begin{aligned} L_K &= \int_0^{u_0} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du \\ &= \arcsin(u_0) \end{aligned}$$

**Definition 3.30.** Die vollständigen elliptischen Integrale erster, zweiter und dritter Art lauten:

$$\begin{aligned} 1. \text{ Art } \quad K(k) &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-z^2) \cdot (1-k^2 \cdot z^2)}} dz \\ 2. \text{ Art } \quad E(k) &= \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2 \cdot z^2}{1-z^2}} dz \\ 2. \text{ Art } \quad \Pi(n, k) &= \int_0^1 \frac{1}{(1-n \cdot z^2) \cdot \sqrt{(1-z^2) \cdot (1-k^2 \cdot z^2)}} dz \end{aligned}$$

Dabei ist der elliptische Modul  $0 < k < 1$ .

Allgemein gilt die Aussage:

**Theorem 3.31.** Sei  $p(z)$  ein Polynom und  $r(z, \sqrt{p(z)})$  eine rationale Funktion. Wenn  $\deg(p) \leq 2$  ist, dann hat das Integral

$$\int r(z, \sqrt{p(z)}) dz$$

eine Stammfunktion, die durch inverse trigonometrische Funktionen gebildet werden kann.

Wenn  $\deg(p) = 3$  oder  $\deg(p) = 4$  ist, dann hat das Integral

$$\int r(z, \sqrt{p(z)}) dz$$

eine Stammfunktion, die durch inverse elliptische Funktionen gebildet werden kann.

## 4 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Bevor wir uns einer weiteren Klasse spezieller Funktion, den hypergeometrischen Funktionen, zuwenden, betrachten wir zunächst die wichtigsten Ergebnisse aus dem Ge-

biet der Differentialgleichungen. Denn hypergeometrische Funktionen sind Lösungen spezieller Differentialgleichungen.

**Definition 4.1.** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und

$$y_1, \dots, y_n : I \longrightarrow \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C}$$

Funktionen der Variablen  $t \in I$  sowie  $y_i^{(k)}$  deren Ableitungen bis zur Ordnung  $r \geq n$ . Ein System von  $m$  Gleichungen für die Funktionen  $y_i$  und deren Ableitungen

$$F_j(t, y_i^{(k)}) = 0 \quad \text{für } 1 \leq i \leq n, 0 \leq k \leq r, 1 \leq j \leq m$$

heißt gewöhnliches Differentialgleichungssystem oder Ordinary Differential Equations (ODE).

Dies ist die allgemeinste Form eines gewöhnlichen Differentialgleichungssystems. Bei gewöhnlichen Differentialgleichungssystemen hängen die Funktionen  $y_i$  nur von einer Variablen ab.

## 4.1 Lineare Differentialgleichung der Ordnung $r$

Eine lineare, inhomogene Differentialgleichung der Ordnung  $r$  liegt vor, wenn

$$\begin{aligned} n &= 1 \quad \text{und} \\ m &= 1 \end{aligned}$$

gilt und die Gleichungen  $F(t, y^{(k)})$  linear in  $y^{(k)}$  sind. Mit Funktionen  $a_r(t)$  und  $b(t)$  erhält man die Differentialgleichung in der Form

$$a_0(t) \cdot y^{(r)}(t) + a_1(t) \cdot y^{(r-1)}(t) + \dots + a_{r-1} \cdot y'(t) + a_r(t) \cdot y(t) = b(t)$$

Wenn  $b(t) \equiv 0$  gilt, heißt die Gleichung homogen, sonst inhomogen.

## 4.2 Lineares Differentialgleichungssystem der Ordnung 1

Ein lineares Differentialgleichungssystem der Ordnung 1 liegt vor, wenn

$$\begin{aligned} n &= m \quad \text{und} \\ r &= 1 \end{aligned}$$

gilt und die Gleichungen  $F_j(t, y_i, y_i')$  linear in  $y_i'$  sind. Wenn die Funktion  $y_i(t)$  zu einem Vektor

$$\bar{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$$

zusammengefaßt werden und die Funktionen  $a_{ij} : I \rightarrow \mathbb{R}$  zu einer Matrix

$$A(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq n}$$

erhält man die Differentialgleichung in der Form

$$\bar{y}'(t) = A(t) \cdot \bar{y}(t) + \bar{b}(t)$$

Wenn  $\bar{b}(t) \equiv 0$  gilt, heisst die Gleichung homogen, sonst inhomogen.

**Proposition 4.2.** *Jedes gewöhnliche Differentialgleichungssystem der Ordnung  $r$  läßt sich auf ein äquivalentes gewöhnliches Differentialgleichungssystem der Ordnung 1 zurückführen.*

*Beweis.* Wir definieren Hilfsfunktionen

$$\begin{aligned} z_1(t) &= y_1(t) \\ z_2(t) &= z_1'(t) = y_1'(t) \\ z_3(t) &= z_2'(t) = y_1^{(2)}(t) \\ &\dots \\ z_r(t) &= z_{r-1}'(t) = y_1^{(r-1)}(t) \\ z_{r+1}(t) &= y_2(t) \\ z_{r+2}(t) &= z_{r+1}'(t) = y_2'(t) \\ z_{r+3}(t) &= z_{r+2}'(t) = y_2^{(2)}(t) \\ &\dots \\ z_{2r}(t) &= z_{2r-1}'(t) = y_1^{(r-1)}(t) \\ &\dots \\ z_{nr}(t) &= z_{nr-1}'(t) = y_n^{(r-1)}(t) \end{aligned}$$

und fügen diese Gleichungen den ursprünglichen Differentialgleichungen zu. Ersetzt man

$y_i^{(k)}$  durch  $z_l$  und  $z_l'$ , erhält man die Differentialgleichungen in der Form

$$\tilde{F}_j(t, z_l, z_l') = 0$$

□

**Beispiel 4.3.** Die lineare Differentialgleichung aus Abschnitt 4.1 kann wie folgt in ein lineares Differentialgleichungssystem aus Abschnitt 4.2 überführt werden. Wir setzen

$$\begin{aligned} y_0(t) &= y(t) \\ y_1(t) &= y'(t) \\ y_2(t) &= y^{(2)}(t) \\ &\dots \\ y_{r-1}(t) &= y^{(r-1)}(t) \end{aligned}$$

und

$$\bar{y}(t) = \begin{pmatrix} y_0(t) \\ y_1(t) \\ \vdots \\ y_{r-2}(t) \\ y_{r-1}(t) \end{pmatrix}$$

sowie

$$\bar{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{b(t)}{a_0(t)} \end{pmatrix}$$

Dann nimmt die lineare Differentialgleichung

$$a_0(t) \cdot y^{(r)}(t) + a_1(t) \cdot y^{(r-1)}(t) + \dots + a_{r-1} \cdot y'(t) + a_r(t) \cdot y(t) = b(t)$$

folgende Form an:

$$y^{(r)} = y'_{r-1} = -\frac{a_1(t)}{a_0(t)} \cdot y_{r-1}(t) - \frac{a_2(t)}{a_0(t)} \cdot y_{r-2}(t) - \dots - \frac{a_{r-1}}{a_0(t)} \cdot y_1(t) - \frac{a_r(t)}{a_0(t)} \cdot y_0(t) + \frac{b(t)}{a_0(t)}$$

Dabei setzen wir  $a_0(t) \neq 0$  voraus, da sonst die Ordnung reduziert wäre. Nun fassen wir

die Koeffizientenfunktionen  $a_i(t)$  zu einer Matrix zusammen:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\frac{a_r(t)}{a_0(t)} & -\frac{a_{r-1}(t)}{a_0(t)} & -\frac{a_{r-2}(t)}{a_0(t)} & \cdots & -\frac{a_1(t)}{a_0(t)} \end{pmatrix}$$

Damit erhält man die lineare Differentialgleichung in der Form

$$\bar{y}'(t) = A(t) \cdot \bar{y}(t) + \bar{b}(t)$$

### 4.3 Satz von Picard-Lindelöf

Der folgende Satz gibt Auskunft über die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des gewöhnlichen Differentialgleichungssystems. Eine Voraussetzung des Satzes ist die Lipschitzstetigkeit der Funktion  $F$  in den zweiten Variablen, die wir zunächst definieren.

**Definition 4.4.** Eine Funktion  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  heisst Lipschitzstetig in den zweiten Variablen, wenn es eine Konstante  $L > 0$  gibt, so dass für alle  $t \in \mathbb{R}$  und  $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$  die Ungleichung

$$|F(t, y_1) - F(t, y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|$$

gilt.

Die Lipschitzstetigkeit ist eine Verschärfung der Stetigkeit, aber schwächer als Differenzierbarkeit.

**Theorem 4.5.** Satz von Picard-Lindelöf

Ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem 1. Ordnung

$$\bar{y}' = F(t, \bar{y})$$

mit einer Lipschitzstetigen Funktion

$$\begin{aligned} F : D &\longrightarrow \mathbb{R}^n & D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \\ (t, \bar{y}) &\longmapsto F(t, \bar{y}) \end{aligned}$$

besitzt für jede Anfangsbedingung  $\bar{y}(0) = \bar{y}_0 \in D$  eine eindeutige Lösung in einem Teilgebiet  $D' \subseteq D$  mit  $\bar{y}_0 \in D'$

$$\bar{y} : D' \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Der Beweis benutzt den Banachschen Fixpunktsatz, der wiederum die Lipschitzstetigkeit voraussetzt.

#### 4.4 Lösung einer linearen Differentialgleichung der Ordnung 1

In diesem Abschnitt leiten wir eine Lösung für eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung aus Abschnitt 4.2 für eine Funktion  $y$  her. Diese hat die allgemeine Form

$$y' = a \cdot y + b$$

mit Funktionen

$$a, b : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

Die Anfangsbedingung sei  $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$ .

(i) Homogener Fall  $b(t) \equiv 0$

Wir integrieren die Differentialgleichung

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = a(t) \cdot y(t)$$

Mit der Stammfunktion  $\hat{a}(t)$  von  $a(t)$  mit  $\hat{a}(0) = 0$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_0^{y(t)} \frac{1}{y} dy &= \int_0^t a(s) ds \\ \ln(y(t)) - \ln(y_0) &= \hat{a}(t) \\ y(t) &= y_0 \cdot e^{\hat{a}(t)} \end{aligned}$$

(ii) Inhomogener Fall

Ausgehend von der Lösung im homogenen Fall variieren wir die Konstante  $y_0$  und ersetzen diese durch eine Funktion  $c(t)$ .

$$y(t) = c(t) \cdot e^{\hat{a}(t)}$$

eingesetzt in Differentialgleichung

$$\begin{aligned} c' \cdot e^{\hat{a}} + c \cdot a \cdot e^{\hat{a}} &= a \cdot c \cdot e^{\hat{a}} + b \\ \Rightarrow c' &= e^{-\hat{a}} \cdot b \\ \Rightarrow c &= y_0 + \int_0^t e^{-\hat{a}} \cdot b ds \\ \Rightarrow y(t) &= e^{\hat{a}(t)} \cdot \left( y_0 + \int_0^t e^{-\hat{a}(s)} \cdot b(s) ds \right) \end{aligned}$$

## 4.5 Lösung eines linearen, homogenen Differentialgleichungssystems 1. Ordnung

Wir fassen die Funktionen  $y_0(t), \dots, y_n(t)$  zu einem Vektor zusammen.

$$\bar{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$$

Die (differenzierbaren) Funktionen  $a_{ij} : I \rightarrow \mathbb{R}$  fassen wir in einer Matrix zusammen.

$$A(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq n}$$

Dann hat das Differentialgleichungssystem die Form

$$\bar{y}'(t) = A(t) \cdot \bar{y}(t)$$

Für jede Anfangsbedingung  $\bar{y}(0) = \bar{y}_0 \in \mathbb{R}^n$  existiert nach dem Satz von Picard-Lindelöf 4.5 eine eindeutige Lösung. Die Lösungsfunktionen bilden einen Vektorraum  $\mathcal{L}$  der Dimension  $n$ . Denn für jedes  $t \in I$  ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \epsilon_t : \mathcal{L} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \bar{y} &\longmapsto \bar{y}(t) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus. Wenn die Lösungsfunktionen  $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n$  für ein  $t_0$  eine Basis in  $\mathbb{R}^n$  bilden, dann auch für alle  $t$ . Das heisst: wenn die aus den Lösungsfunktionen gebildete verallgemeinerte Wronski-Matrix

$$\Phi(t) = (\bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_n(t))$$

für ein  $t_0$  die Determinante  $\det \Phi(t_0) \neq 0$  besitzt, dann auch für alle  $t$ .

Die Stammfunktion der Matrix  $A$  wird komponentenweise gebildet.

$$\begin{aligned} \hat{A}(t) &= \int_0^t A(s) ds \\ &= \left( \int_0^t a_{ij}(s) ds \right)_{1 \leq i, j \leq n} \end{aligned}$$

Die Exponentialfunktion kann auch für Matrizen definiert werden.

**Definition 4.6.** Sei  $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$  eine komplexe Matrix. Dann ist die Exponentialfunktion

der Matrix definiert durch

$$e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n$$

Dabei ist  $X^n$  durch die Matrix-Multiplikation definiert.

Wie im 1-dimensionalen Fall konvergiert die Exponentialfunktion auch für alle Matrizen  $X$ . Bei den Rechenregeln muss man allerdings beachten, dass die Matrix-Multiplikation nicht kommutativ ist.

**Proposition 4.7.** Für die Exponentialfunktion von Matrizen gelten folgende Rechenregeln. Dabei bezeichne  $(0)_{n \times n}$  eine  $n \times n$  Matrix mit lauter Nullen und  $Id_n$  eine Einheitsmatrix mit  $n$  Zeilen und Spalten.

(i)

$$e^{(0)_{n \times n}} = Id_n$$

(ii)

$$e^{X \cdot t} \cdot e^{X \cdot s} = e^{X \cdot (t+s)}$$

(iii)

$$[X, Y] = 0 \quad \Rightarrow \quad e^X \cdot e^Y = e^{X+Y}$$

(iv)

$$e^{R^{-1}XR} = R^{-1}e^Y R$$

(v)

$$\det e^X = e^{\text{tr}(X)} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad e^X \in GL_n(\mathbb{C})$$

*Beweis.* Die Rechenregeln (i), (ii) und (iv) sind klar.

ad (iii) Die Matrix Multiplikation ist nicht kommutativ. Daher ist die Bedingung  $[X, Y] = (0)_{n \times n}$  notwendig.

$$\begin{aligned} e^{X+Y} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (X+Y)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{A_i=X \text{ oder } A_i=Y} A_1 \cdots A_n \\ e^X \cdot e^Y &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} Y^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot X^i \cdot Y^{n-i} \end{aligned}$$

ad (v) Die letzte Rechenregel soll nun erläutert werden. Mithilfe eines Basiswechsels  $T$  läßt sich die Matrix  $X$  auf Jordansche Normalform bringen.

$$T^{-1}XT = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \boxed{J_2} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \boxed{J_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \end{pmatrix}$$

Mit den Eigenwerten  $\lambda_i$  hat jeder Jordan Kasten die Form

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} = \lambda_i \cdot Id_{j_i} + N_i$$

Dabei ist  $j_i$  die Vielfachheit des Eigenwertes  $\lambda_i$  und  $N_i$  eine nilpotente Matrix, die natürlich mit der Diagonalmatrix  $\lambda_i \cdot Id_{j_i}$  kommutiert. Somit erhalten wir für die Potenzen von  $J_i$

$$J_i^n = \lambda_i^n \cdot Id_{j_i} + \sum_{k=1}^n \lambda_i^{n-k} \cdot \binom{n}{k} \cdot N_i^k$$

und für  $e^{J_i}$

$$\begin{aligned}
 e^{J_i} &= e^{\lambda_i \cdot Id_{j_i} + \hat{N}_i} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \lambda_i^n \cdot Id_{j_i} + \sum_{k=1}^n \lambda_i^{n-k} \cdot \binom{n}{k} \cdot \hat{N}_i^k \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_i^n \cdot Id_{j_i} + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^n \lambda_i^{n-k} \cdot \binom{n}{k} \cdot \hat{N}_i^k \right) \\
 &= e^{\lambda_i} \cdot 1_{j_i} + \hat{N}_i
 \end{aligned}$$

Wobei  $Id_{j_i}$  die Einheitsmatrix mit  $j_i$  Zeilen und  $\hat{N}_i$  eine nilpotente Matrix ist. Da die Determinante nilpotenter Matrizen Null ist, gilt für die Determinante von  $e^X$

$$\begin{aligned}
 \det e^X &= \det(T^{-1} \cdot e^X \cdot T) \\
 &= \det e^{T^{-1}XT} \\
 &= \det(e^{J_1} \oplus e^{J_2} \oplus \dots \oplus e^{J_k}) \\
 &= \det(e^{\lambda_1} \cdot Id_{j_1} + \hat{N}_1 \oplus \dots \oplus e^{\lambda_k} \cdot Id_{j_k} + \hat{N}_k) \\
 &= (e^{\lambda_1})^{j_1} \cdot (e^{\lambda_2})^{j_2} \dots (e^{\lambda_k})^{j_k} \\
 &= e^{\lambda_1 \cdot j_1 + \lambda_2 \cdot j_2 + \dots + \lambda_k \cdot j_k} \\
 &= e^{\text{tr}(T^{-1}XT)} \\
 &= e^{\text{tr}(X)}
 \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 4.8.** Die Funktion  $\bar{y}(t) = e^{\hat{A}(t)} \cdot \bar{y}_0$  ist nur dann eine Lösung des linearen, homogenen Differentialgleichungssystems der Ordnung  $n$

$$\bar{y}'(t) = A(t) \cdot \bar{y}(t)$$

wenn die Matrizen  $A(t)$  und  $\hat{A}(t)$  kommutieren. Das heisst  $[A(t), \hat{A}(t)] = 0$ . Denn die

rechte Seite ergibt

$$\begin{aligned}
 \bar{y}'(t) &= (e^{\hat{A}(t)} \cdot \bar{y}_0)' \\
 &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \hat{A}(t)^k \right)' \cdot \bar{y}_0 \\
 &= (Id_n + \hat{A}(t) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \hat{A}(t)^k)' \cdot \bar{y}_0 \\
 &= \left( A(t) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \overbrace{\left( \underbrace{A(t) \cdot \hat{A}(t) \cdots \hat{A}(t)}_{k \text{ Faktoren}} + \underbrace{\hat{A}(t) \cdot A(t) \cdot \hat{A}(t) \cdots \hat{A}(t)}_{k \text{ Faktoren}} + \cdots + \underbrace{\hat{A}(t) \cdots \hat{A}(t) \cdot A(t)}_{k \text{ Faktoren}} \right)}^{k \text{ Summanden}} \right) \cdot \bar{y}_0
 \end{aligned}$$

Dies stimmt nur für  $[A(t), \hat{A}(t)] = 0$  mit der rechten Seite überein.

$$\begin{aligned}
 A(t) \cdot \bar{y}(t) &= A(t) \cdot e^{\hat{A}(t)} \cdot \bar{y}_0 \\
 &= A(t) \cdot \left( Id_n + \hat{A}(t) + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} \hat{A}(t)^{k-1} \right) \cdot \bar{y}_0 \\
 &= \left( A(t) + \frac{1}{2} (A(t) \cdot \hat{A}(t) + A(t) \cdot \hat{A}(t)) + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(k-1)! \cdot k} \left( \sum_{i=1}^k A(t) \cdot \hat{A}(t)^{k-1} \right) \right) \cdot \bar{y}_0 \\
 &= \left( A(t) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^k A(t) \cdot \hat{A}(t)^{k-1} \right) \cdot \bar{y}_0
 \end{aligned}$$

Wir betrachten nun die Struktur und einige Eigenschaften des Lösungsraumes eines linearen, homogenen Differentialgleichungssystems 1. Ordnung.

**Definition 4.9.** Eine Lösungsbasis  $\{\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n\}$  des linearen, homogenen Differentialgleichungssystems

$$\bar{y}'(t) = A(t) \cdot \bar{y}(t)$$

heisst Fundamentalsystem.

Die verallgemeinerte Wronski-Matrix

$$\Phi(t) = (\bar{y}_1(t) \cdots \bar{y}_n(t))$$

wird aus den Spaltenvektoren der Lösungsbasis gebildet und heisst Fundamentalmatrix.

Eine Fundamentalmatrix  $\Phi(t)$  mit den Anfangsbedingungen

$$\Phi(0) = Id_n$$

heisst Hauptfundamentalmatrix. Die zugehörigen Lösungen bilden ein Hauptfundamen-

talsystem.

**Korollar 4.10.** *Eine Fundamentalmatrix  $\Phi(t)$  genügt der Matrix Differentialgleichung*

$$\Phi'(t) = A(t) \cdot \Phi(t)$$

**Theorem 4.11.** Liouvillesche Formel

*Sei  $\Phi(t)$  eine Fundamentalmatrix des linearen, homogenen Differentialgleichungssystems 1. Ordnung*

$$\bar{y}'(t) = A(t) \cdot \bar{y}(t)$$

*und  $w(t) = \det(\Phi(t))$  deren Determinante. Dann gilt*

$$w'(t) = \text{tr}(A(t)) \cdot w(t)$$

Zu dieser Differentialgleichung der Ordnung 1 haben wir die Lösung in Abschnitt 4.4 hergeleitet. Also folgt mit der Rechenregel 4.7 (v):

**Korollar 4.12.** *Sei  $\Phi(t)$  eine Fundamentalmatrix des linearen, homogenen Differentialgleichungssystems 1. Ordnung*

$$\bar{y}'(t) = A(t) \cdot \bar{y}(t)$$

*und  $w(t) = \det(\Phi(t))$  deren Determinante. Zu der Anfangsbedingung  $w_0 = w(0)$  lautet die Lösung der Differentialgleichung*

$$\begin{aligned} w(t) &= w_0 \cdot e^{\int_0^t \text{tr}(A(s)) ds} \\ &= w_0 \cdot e^{\text{tr}\left(\int_0^t A(s) ds\right)} \\ &= w_0 \cdot e^{\text{tr}(\hat{A}(t))} \\ &= w_0 \cdot \det\left(e^{\hat{A}(t)}\right) \end{aligned}$$

In Proposition 4.2 haben wir gesehen, dass eine gewöhnliche, lineare Differentialgleichung der Ordnung n in ein lineares Differentialgleichungssystem der Ordnung 1 überführt werden kann. Somit erhalten wir als weitere Folgerung:

**Korollar 4.13.** Satz von Abel

*Sei*

$$a_0(t) \cdot y^{(n)}(t) + a_1(t) \cdot y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} \cdot y'(t) + a_n(t) \cdot y(t) = 0$$

eine lineare, homogene Differentialgleichung der Ordnung  $n$  und

$$w(t) = \det \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

die Wronski-Determinante einer Lösung. Dann erfüllt  $w(t)$  die Differentialgleichung

$$w'(t) = -\frac{a_1(t)}{a_0(t)} \cdot w(t)$$

mit der Lösung

$$w(t) = w_0 \cdot e^{-\int_0^t \frac{a_1(s)}{a_0(s)} ds}$$

## 5 Hypergeometrische Funktionen

Wir gehen von einer Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

aus.

Diese heisst arithmetisch, wenn es eine Zahl  $a$  gibt, so dass

$$c_{n+1} = c_n + a$$

$$\text{also } c_n = c_0 + n \cdot a$$

gilt. Wird damit eine Potenzreihe gebildet, ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot t^n &= c_0 \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} t^n}_{=(1-t)^{-1}} + a \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot t^n \\ &= (c_0 - a) \cdot (1-t)^{-1} + a \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(n+1) \cdot t^n}_{=\frac{d}{dt} t^{n+1}} \\ &= (c_0 - a) \cdot (1-t)^{-1} + a \cdot \frac{d}{dt} \left( \sum_{m=0}^{\infty} t^m - 1 \right) \\ &= (c_0 - a) \cdot (1-t)^{-1} + a \cdot \frac{d}{dt} \left( (1-t)^{-1} - 1 \right) \\ &= (c_0 - a) \cdot (1-t)^{-1} + a \cdot (1-t)^{-2} \end{aligned}$$

Die Reihe heisst geometrisch, wenn es eine Zahl  $a$  gibt, so dass

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= a \cdot c_n \\ \text{also } c_n &= c_0 \cdot a^n \end{aligned}$$

gilt. Wird damit eine Potenzreihe gebildet, ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot t^n &= c_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (a \cdot t)^n \\ &= c_0 \cdot (1 - a \cdot t)^{-1} \end{aligned}$$

Die hypergeometrischen Reihen sind eine Verallgemeinerung. Hier wird der nachfolgende Summand durch Multiplikation des vorhergehenden Summanden mit einer rationalen Funktion  $R(n)$  gebildet.

$$c_{n+1} = R(n) \cdot c_n$$

Schreibt man die rationale Funktion als Quotient zweier Polynome  $a(x)$  mit Grad  $\deg(a) = p$  und  $b(x)$  mit Grad  $\deg(b) = q$ , erhält man:

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{a(x)}{b(x)} \\ &= c \cdot \frac{(a_1 + x) \cdot (a_2 + x) \cdots (a_p + x)}{(b_1 + x) \cdot (b_2 + x) \cdots (b_q + x)} \end{aligned}$$

Dabei sind  $a_1, a_2, \dots, a_p \in \mathbb{C}$  die negativen Nullstellen des Polynoms  $a(x)$  und  $b_1, b_2, \dots, b_q \in \mathbb{C}$  die negativen Nullstellen des Polynoms  $b(x)$ . Nach einer eventuellen Umnormierung der Variablen kann  $c = 1$  angenommen werden. Für die Summanden  $c_n$  ergibt sich

$$\begin{aligned} c_n &= R(n-1) \cdot R(n-2) \cdots R(0) \\ &= \frac{(a_1)_n \cdot (a_2)_n \cdots (a_p)_n}{(b_1)_n \cdot (b_2)_n \cdots (b_q)_n} \end{aligned}$$

mit dem Pochhammer Symbol (siehe Definition 1.5)

$$\begin{aligned} (a)_n &= a \cdot (a+1) \cdot (a+2) \cdots (a+n-1) \\ &= \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \end{aligned}$$

Aus historischen Gründen wird  $b_{q+1} = 1$  gesetzt, was  $(b_{q+1})_n = n!$  zur Folge hat.

Damit können hypergeometrische Funktionen nun wie folgt definiert werden.

**Definition 5.1.** Hypergeometrische Funktion

Seien  $a_1, a_2, \dots, a_p \in \mathbb{C}$  sowie  $b_1, b_2, \dots, b_q \in \mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$ . Dann ist eine hypergeometrische Funktion definiert durch

$${}_pF_q(a_1, a_2, \dots, a_p; b_1, b_2, \dots, b_q; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdot (a_2)_n \cdots (a_p)_n}{(b_1)_n \cdot (b_2)_n \cdots (b_q)_n} \frac{t^n}{n!}$$

**Bemerkung 5.2.** Wenn eine der Zahlen  $a_i \in -\mathbb{N}$  eine negative natürliche Zahl ist, dann bricht die Summe ab und man erhält ein Polynom. Die interessanten hypergeometrischen Funktion erhält man für  $a_i \notin -\mathbb{N}$

**Bemerkung 5.3.** Die Reihenfolge der Zahlen  $a_i$  und  $b_j$  spielt keine Rolle.

**Bemerkung 5.4.** Wenn eine der Zahlen  $a_i$  mit einer der Zahlen  $b_j$  übereinstimmt, kürzen die sich weg. Daher setzen wir im folgenden voraus, dass keine der Zahlen  $a_i$  mit einer der Zahlen  $b_j$  übereinstimmt.

### 5.1 Konvergenz von Hypergeometrischen Funktionen

**Proposition 5.5.** *Eine hypergeometrische Funktion*

$${}_pF_q(a_1, a_2, \dots, a_p; b_1, b_2, \dots, b_q; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdot (a_2)_n \cdots (a_p)_n}{(b_1)_n \cdot (b_2)_n \cdots (b_q)_n} \frac{t^n}{n!}$$

ist konvergent für  $q + 1 > p$ .

Sie ist divergent für  $q + 1 < p$ .

Für  $q + 1 = p$  besitzt die hypergeometrische Funktion den Konvergenzradius  $\rho = 1$ .

*Beweis.* Mit dem Quotientenkriterium folgt

$$\begin{aligned} \frac{c_{n+1}}{c_n} &= \frac{(a_1)_{n+1} \cdot (a_2)_{n+1} \cdots (a_p)_{n+1}}{(b_1)_{n+1} \cdot (b_2)_{n+1} \cdots (b_q)_{n+1} \cdot (n+1)!} \cdot \frac{(b_1)_n \cdot (b_2)_n \cdots (b_q)_n \cdot n!}{(a_1)_n \cdot (a_2)_n \cdots (a_p)_n} \\ &= \frac{(a_1 + n + 1) \cdot (a_2 + n + 1) \cdots (a_p + n + 1)}{(b_1 + n + 1) \cdot (b_2 + n + 1) \cdots (b_q + n + 1) \cdot (n + 1)} \\ &= \frac{\left(\frac{a_1}{n+1} + 1\right) \cdot \left(\frac{a_2}{n+1} + 1\right) \cdots \left(\frac{a_p}{n+1} + 1\right)}{\left(\frac{b_1}{n+1} + 1\right) \cdot \left(\frac{b_2}{n+1} + 1\right) \cdots \left(\frac{b_q}{n+1} + 1\right) \cdot (n + 1)^{q+1-p}} \\ &\rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{falls } q + 1 > p \\ 1 & \text{falls } q + 1 = p \\ \infty & \text{falls } q + 1 < p \end{array} \right\} \quad \text{für } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

□

## 5.2 Hypergeometrische Differentialgleichung

Hypergeometrische Funktionen sind durch eine Differentialgleichung gekennzeichnet. Zur Abkürzung verwenden wir folgenden Differential-Operator

$$D = t \frac{d}{dt} \tag{DO}$$

Dieser hat die Eigenschaft

$$D t^n = n \cdot t^n$$

**Theorem 5.6.** *Eine Potenzreihe*

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot t^n \quad \text{mit } c_0 = 1$$

ist genau dann eine hypergeometrische Funktion, wenn es Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_p \in \mathbb{C}$  sowie  $b_1, b_2, \dots, b_q \in \mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$  und einen Differential-Operator

$$L = \frac{d}{dt} \prod_{j=1}^q (D + b_j - 1) - \prod_{k=1}^p (D + a_k)$$

gibt, so dass

$$L f = 0$$

gilt.

*Beweis.* Wir betrachten vorab die Wirkung des Differential-Operators  $(D + a)$  auf eine Potenzreihe.

$$(D + a) f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + a) \cdot c_n \cdot t^n$$

Somit erhält man für den zweiten Summanden des Differential-Operators  $L$

$$\left( \prod_{k=1}^p (D + a_k) \right) f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=1}^p (a_k + n) \cdot c_n \cdot t^n$$

Für den ersten Summanden ergibt sich

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dt} \prod_{j=1}^q (D + b_j - 1) \right) f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \left( \prod_{j=1}^q (b_j + n - 1) \cdot c_n \cdot t^n \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n \prod_{j=1}^q (b_j + n - 1) \cdot c_n \cdot t^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1) \prod_{j=1}^q (b_j + n) \cdot c_{n+1} \cdot t^n \end{aligned}$$

Die Potenzreihe  $f$  erfüllt nun genau dann die Differentialgleichung  $L f = 0$ , wenn diese beiden Summanden gleich sind. Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich folgende Rekursionsformel für  $c_{n+1}$ :

$$\begin{aligned}
 L f &= 0 \\
 \Leftrightarrow \prod_{k=1}^p (a_k + n) \cdot c_n &= (n + 1) \prod_{j=1}^q (b_j + n) \cdot c_{n+1} \\
 \Leftrightarrow c_{n+1} &= \frac{\prod_{k=1}^p (a_k + n)}{(n + 1) \prod_{j=1}^q (b_j + n)} \cdot c_n \\
 &= \frac{\prod_{k=1}^p (a_k + n) \cdot (a_k + n - 1)}{(n + 1) \cdot n \prod_{j=1}^q (b_j + n) \cdot (b_j + n - 1)} \cdot c_{n-1} \\
 &\dots \\
 &= \frac{\prod_{k=1}^p (a_k)_{n+1}}{(n + 1)! \prod_{j=1}^q (b_j)_{n+1}}
 \end{aligned}$$

Dabei wurde die Voraussetzung  $c_0 = 1$  verwendet. □

**Bemerkung 5.7.** Der in Theorem 5.6 definierte Differential-Operator  $L$  führt auf eine gewöhnliche Differentialgleichung für  $f$  mit der Ordnung

$$r = \max\{p, q + 1\}$$

Durch hypergeometrische Funktionen lassen sich auch manche elementare Funktionen darstellen wie die folgenden Beispiele zeigen.

**Beispiel 5.8.** e-Funktion

$${}_0F_0(; ; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t$$

Der zugehörige Differential-Operator lautet:

$$L = \frac{d}{dt} - 1$$

**Beispiel 5.9.** Binomial-Reihe

$${}_1F_0(a; ; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} t^n = (1 - t)^{-a}$$

Der zugehörige Differential-Operator lautet:

$$L = \frac{d}{dt} - t \cdot \frac{d}{dt} - a = (1 - t) \cdot \frac{d}{dt} - a$$

**Beispiel 5.10.** Cosinus-Funktion

$$\begin{aligned} {}_0F_1\left(\left(\frac{1}{2}\right); -\frac{t^2}{4}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)_n} \frac{1}{n!} \left(-\frac{t^2}{4}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{t^{2n}}{(2n)!} \\ &= \cos(t) \end{aligned}$$

**Beispiel 5.11.** Logarithmus

$$\begin{aligned} {}_2F_1(1, 1; 2; -t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overbrace{(1)_n \cdot (1)_n}^{=n! \cdot \Gamma(1+n)}}{\underbrace{(2)_n}_{= \frac{\Gamma(2+n)}{\Gamma(2)} = (1+n) \cdot \Gamma(1+n)}} \frac{1}{n!} (-t)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n} (-t)^n \\ &= \frac{1}{t} \ln(1+t) \end{aligned}$$

Der zugehörige Differential-Operator ist:

$$L = (-t) \cdot (1+t) \cdot \frac{d^2}{dt^2} - (2+3t) \cdot \frac{d}{dt} - 1$$

**5.3 Gaußsche Hypergeometrische Funktionen**

Die Darstellung der Logarithmus-Funktion als hypergeometrische Funktion gehört der Klasse der Gaußschen hypergeometrischen Funktionen an, die eigentlich auf Euler zurückgeht.

**Definition 5.12.** Die Gaußschen hypergeometrischen Funktionen sind definiert durch

$${}_2F_1(a, b; c; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n \cdot (b)_n}{(c)_n} \frac{t^n}{n!} \quad \text{mit } c \neq 0$$

**Bemerkung 5.13.** Nach Definition und der Konvention  $(a)_0 = 1$  für das Pochhammer Symbol ist der Funktionswert aller Gaußschen hypergeometrischen Funktionen an der Stelle 0

$${}_2F_1(a, b; c; 0) = 1$$

**Beispiel 5.14.** Für  $a = 1$  und  $b = c$  erhalten wir

$$\begin{aligned} {}_2F_1(1, b; b; t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! \cdot (b)_n}{(b)_n} \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \\ &= 1 + t + t^2 + t^3 + \dots \end{aligned}$$

also die geometrische Reihe. Dies erklärt den Namen für die hypergeometrischen Funktionen.

**Proposition 5.15.** *Der Differential-Operator einer Gaußschen hypergeometrischen Funktion lautet:*

$$L_{abc} = t \cdot (1 - t) \cdot \frac{d^2}{dt^2} + (c - (a + b + 1) \cdot t) \cdot \frac{d}{dt} - a \cdot b \quad (L_{abc})$$

*Beweis.* Nach Theorem 5.6 ist der hypergeometrischen Funktion  ${}_2F_1(a, b; c; t)$  folgender Differential-Operator zugeordnet:

$$L_{abc} = \frac{d}{dt}(D + c - 1) - (D + a) \cdot (D + b)$$

Angewendet auf die Funktion  $f$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} L_{abc} f &= \frac{d}{dt} \left( t \cdot \frac{d}{dt} + c - 1 \right) f - \left( t \cdot \frac{d}{dt} + a \right) \cdot \left( t \cdot \frac{d}{dt} + b \right) f \\ &= \frac{d}{dt} \left( t \cdot f' + (c - 1) \cdot f \right) - \left( t \cdot \frac{d}{dt} \cdot \left( t \cdot \frac{d}{dt} f \right) + (a + b) \cdot t \cdot f' + a \cdot b \cdot f \right) \\ &= t \cdot f'' + f' + (c - 1) \cdot f' - t \cdot \frac{d}{dt} \cdot \left( t \cdot f' \right) - (a + b) \cdot t \cdot f' - a \cdot b \cdot f \\ &= t \cdot f'' + c \cdot f' - t \cdot f' - t^2 \cdot f'' - (a + b) \cdot t \cdot f' - a \cdot b \cdot f \\ &= t \cdot (1 - t) \cdot f'' + (c - (a + b + 1) \cdot t) \cdot f' - a \cdot b \cdot f \end{aligned}$$

□

**Korollar 5.16.** *Gaußsche hypergeometrische Funktionen  $y$  sind somit Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung*

$$t \cdot (1 - t) \cdot y'' + (c - (a + b + 1) \cdot t) \cdot y' - a \cdot b \cdot y = 0 \quad (G2D)$$

*Die Differentialgleichung hat singuläre Stellen bei  $t = 0$ ,  $t = 1$  und  $t = \infty$ .*

**Bemerkung 5.17.** Die Differentialgleichung (G2D) hat nach Abschnitt 4.5 einen 2-dimensionalen Lösungsraum. Wenn  $y_2$  die zweite Lösung neben  $y_1 = F(a, b; c; t)$  ist,

dann erfüllt die Wronski-Determinante

$$w = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}$$

nach dem Satz von Abel 4.13 die Differentialgleichung

$$w' = -\frac{c - (a + b + 1) \cdot t}{t \cdot (1 - t)} w$$

Wir wollen nun die zweite Lösung der Differentialgleichung (G2D) bestimmen. Wir werden den hypergeometrischen Differential-Operator  $L_{abc}$  so umformen, dass die Lösungen erhalten bleiben und die zweite Lösung direkt daraus abgelesen werden kann. Dazu leiten wir noch einige nützliche Eigenschaften von Gaußschen hypergeometrischen Funktionen und dem Differential-Operator her.

**Proposition 5.18.** *Die Ableitung einer Gaußschen hypergeometrischen Funktion  $F(a, b; c; t)$  ist gegeben durch:*

$$\frac{d}{dt} F(a, b; c; t) = \frac{ab}{c} F(a + 1, b + 1; c + 1; t)$$

*Beweis.* Für das Pochhammer Symbol gilt die Formel

$$\begin{aligned} (a)_{n+1} &= a \cdot (a + 1) \cdot (a + 2) \cdots (a + n - 1) \cdot (a + n) \\ &= a \cdot (a + 1)_n \end{aligned}$$

Dies wird in die Ableitung der Gaußschen hypergeometrischen Funktion eingesetzt.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F(a, b; c; t) &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n \cdot (b)_n}{(c)_n} \frac{t^n}{n!} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n \cdot (b)_n}{(c)_n} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+1} \cdot (b)_{m+1}}{(c)_{m+1}} \frac{t^m}{m!} \\ &= \frac{ab}{c} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a+1)_m \cdot (b+1)_m}{(c+1)_m} \frac{t^m}{m!} \\ &= \frac{ab}{c} F(a+1, b+1; c+1; t) \end{aligned}$$

□

**Proposition 5.19.** Für den Differential-Operator  $D = t \frac{d}{dt}$  gilt

$$t^{-b} D(t^b \cdot u(t)) = (D + b) u(t)$$

*Beweis.* Der Beweis erfolgt durch einfaches Nachrechnen.

$$\begin{aligned} t^{-b} D(t^b \cdot u(t)) &= t^{-b} \cdot t \cdot (b \cdot t^{b-1} \cdot u(t) + t^b \cdot u'(t)) \\ &= t \cdot u'(t) + b \cdot u(t) \\ &= (D + b) u(t) \end{aligned}$$

□

Eine ähnliche Umformung gilt für den hypergeometrischen Differential-Operator.

**Proposition 5.20.** Für den Differential-Operator  $L_{a,b;c}$  einer Gaußschen hypergeometrischen Funktion gilt

$$t^{c-1} L_{a,b;c} t^{1-c} = L_{a+1-c,b+1-c;2-c}$$

*Beweis.* Zum Beweis verwenden wir die Formel ( $L_{abc}$ ) aus Proposition 5.15.

$$\begin{aligned}
 (t^{c-1} L_{a,b;c} t^{1-c})(u(t)) &= t^{c-1} \cdot \left( t \cdot (1-t) \frac{d^2}{dt^2} + (c - (a+b+1) \cdot t) \frac{d}{dt} - a \cdot b \right) (t^{1-c} \cdot u(t)) \\
 &= t^{c-1} \cdot \left( t \cdot (1-t) \frac{d}{dt} \left( (1-c) \cdot t^{-c} \cdot u(t) + t^{1-c} \cdot u'(t) \right) \right) \\
 &\quad + t^{c-1} \cdot \left( (c - (a+b+1) \cdot t) \cdot \left( (1-c) \cdot t^{-c} \cdot u(t) + t^{1-c} \cdot u'(t) \right) \right) \\
 &\quad - t^{c-1} \cdot (a \cdot b \cdot t^{1-c} \cdot u(t)) \\
 &= t^{c-1} \cdot \left( t \cdot (1-t) \left( -c \cdot (1-c) \cdot t^{-1-c} \cdot u(t) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2 \cdot (1-c) \cdot t^{-c} \cdot u'(t) + t^{1-c} \cdot u''(t) \right) \right) \\
 &\quad + t^{c-1} \cdot \left( c \cdot (1-c) \cdot t^{-c} \cdot u(t) - (a+b+1) \cdot (1-c) \cdot t^{1-c} \cdot u(t) \right. \\
 &\quad \left. + c \cdot t^{1-c} \cdot u'(t) - (a+b+1) \cdot t^{2-c} \cdot u'(t) \right) \\
 &\quad - a \cdot b \cdot u(t) \\
 &= t \cdot (1-t) \cdot u''(t) \\
 &\quad + \left( 2 \cdot (1-t) \cdot (1-c) + c - (a+b+1) \cdot t \right) \cdot u'(t) \\
 &\quad + \left( -\frac{1}{t} \cdot (1-t) \cdot c \cdot (1-c) + \frac{1}{t} \cdot c \cdot (1-c) - (a+b+1) \cdot (1-c) - a \cdot b \right) \cdot u(t) \\
 &= t \cdot (1-t) \cdot u''(t) \\
 &\quad + \left( 2 - 2 \cdot t - 2 \cdot c + 2 \cdot c \cdot t + c - (a+b+1) \cdot t \right) \cdot u'(t) \\
 &\quad + \left( c - c^2 - a - b - 1 + a \cdot c + b \cdot c + c - a \cdot b \right) \cdot u(t) \\
 &= t \cdot (1-t) \cdot u''(t) \\
 &\quad + \left( 2 - c - (a+b+3 - 2 \cdot c) \cdot t \right) \cdot u'(t) \\
 &\quad + \left( c \cdot (b+1-c) - a \cdot (b+1-c) - b - 1 + c \right) \cdot u(t) \\
 &= L_{a+1-c, b+1-c; 2-c} u(t)
 \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 5.21.** Für  $c = 1$  erhalten wir die Tautologie

$$\begin{aligned}
 t^{1-1} L_{a,b;1} t^{1-1} &= L_{a+1-1, b+1-1; 2-1} \\
 \Rightarrow L_{a,b;1} &= L_{a,b;1}
 \end{aligned}$$

**Korollar 5.22.** Für  $c \neq 1$  ist die zweite Lösung einer Gaußschen hypergeometrischen Differentialgleichung gegeben durch die Funktion

$$t^{1-c} \cdot F(a+1-c, b+1-c; 2-c; t)$$

*Beweis.* Die Gaußsche hypergeometrische Funktion

$$g_2(t) = F(a + 1 - c, b + 1 - c; 2 - c; t)$$

ist eine Lösung der Differentialgleichung

$$L_{a+1-c, b+1-c; 2-c} g_2(t) = 0$$

Nach Proposition 5.20 ist

$$f_2(t) = t^{1-c} \cdot g_2(t) = t^{1-c} \cdot F(a + 1 - c, b + 1 - c; 2 - c; t)$$

auch eine Lösung der Differentialgleichung

$$L_{a, b; c} f_2(t) = 0$$

Wir müssen nun noch zeigen, dass die Lösungen

$$\begin{aligned} f_1(t) &= F(a, b; c; t) \\ \text{und } f_2(t) &= t^{1-c} \cdot F(a + 1 - c, b + 1 - c; 2 - c; t) \\ &= t^{1-c} \cdot g_2(t) \end{aligned}$$

linear unabhängig sind und den Lösungsraum aufspannen. Dazu berechnen wir die Wronski-Determinante. Der besseren Übersicht wegen setzen wir

$$\begin{aligned} a' &= a + 1 - c \\ b' &= b + 1 - c \\ c' &= c - 2 \quad \text{sowie} \\ f_1^*(t) &= F(a + 1, b + 1; c + 1; t) \\ g_2^*(t) &= F(a + 2 - c, b + 2 - c; 3 - c; t) \end{aligned}$$

Die Ableitungen der Lösungsfunktionen lauten nach dann Proposition 5.18

$$\begin{aligned} f_1'(t) &= \frac{ab}{c} \cdot f_1^*(t) \\ f_2'(t) &= (1 - c) \cdot t^{-c} \cdot g_2(t) + t^{1-c} \cdot \frac{a'b'}{c'} \cdot g_2^*(t) \\ &= t^{-c} \cdot \left( (1 - c) \cdot g_2 + t \cdot \frac{a'b'}{c'} \cdot g_2^*(t) \right) \end{aligned}$$

Damit berechnet man die Wronski-Determinante zu

$$\begin{aligned} w(t) &= f_1(t) \cdot f_2'(t) - f_1'(t) \cdot f_2(t) \\ &= t^{-c} \cdot ((1-c) \cdot f_1(t) \cdot g_2(t) + t \cdot \frac{a'b'}{c'} \cdot f_1(t) \cdot g_2^*(t) - t \cdot \frac{ab}{c} \cdot f_1^*(t) \cdot g_2(t)) \end{aligned}$$

Da alle Gaußschen hypergeometrischen Funktionen an der Stelle 0 den Wert 1 annehmen, gilt

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{w(t)}{(1-c) \cdot t^{-c}} = 1$$

Das heisst, die Wronski-Determinante ist für  $t \rightarrow 0$  asymptotisch äquivalent zu  $(1-c) \cdot t^{-c}$  und damit in einer Umgebung der 0 ungleich 0. Somit sind die beiden Lösungen  $f_1$  und  $f_2$  linear unabhängig.  $\square$

**Theorem 5.23.** Die Gaußsche hypergeometrische Funktion  $F(a, b; c; t)$  hat die nach Euler benannte Integraldarstellung

$$F(a, b; c; t) = \frac{1}{B(a, c-a)} \int_0^1 s^{a-1} \cdot (1-s)^{c-a-1} \cdot (1-st)^{-b} ds \quad (\text{EI})$$

für  $\text{Re}(c) > \text{Re}(a) > 0$ . Dabei ist  $B(x, y)$  die Eulersche Beta-Funktion.

*Beweis.* Wir nutzen die Formel für die Beta-Funktion aus Theorem 1.8

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \cdot \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

und verwenden dies für den Quotient  $\frac{(a)_n}{(c)_n}$  in der Summe.

$$\begin{aligned} \frac{(a)_n}{(c)_n} &= \frac{\Gamma(a+n) \cdot \Gamma(c)}{\Gamma(a) \cdot \Gamma(c+n)} \\ &= \frac{\Gamma(a+n) \cdot \Gamma(c-a)}{\Gamma(c+n)} \cdot \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a) \cdot \Gamma(c-a)} \\ &= \frac{B(a+n, c-a)}{B(a, c-a)} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die hypergeometrische Funktion

$$\begin{aligned}
 F(a, b; c; t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n \cdot (b)_n t^n}{(c)_n n!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B(a+n, c-a)}{B(a, c-a)} (b)_n \cdot \frac{t^n}{n!} \\
 &= \frac{1}{B(a, c-a)} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 s^{a-1+n} \cdot (1-s)^{c-a-1} \cdot \frac{(b)_n}{n!} \cdot t^n ds \\
 &= \frac{1}{B(a, c-a)} \cdot \int_0^1 s^{a-1} \cdot (1-s)^{c-a-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n}{n!} \cdot (s \cdot t)^n ds \\
 &= \frac{1}{B(a, c-a)} \cdot \int_0^1 s^{a-1} \cdot (1-s)^{c-a-1} \cdot (1-s \cdot t)^b ds
 \end{aligned}$$

nach Beispiel 5.9. □

**Korollar 5.24.** Gaußsche hypergeometrische Formel

Der Funktionswert einer Gaußschen hypergeometrischen Funktion an der Stelle 1 beträgt

$$F(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c) \cdot \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \cdot \Gamma(c-b)}$$

*Beweis.* Mit Formel (EI) aus Theorem 5.23 erhält man

$$\begin{aligned}
 F(a, b; c; 1) &= \frac{1}{B(a, c-a)} \int_0^1 s^{a-1} \cdot (1-s)^{c-a-1} \cdot (1-s \cdot 1)^{-b} ds \\
 &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a) \cdot \Gamma(c-a)} \int_0^1 s^{a-1} \cdot (1-s)^{c-a-b-1} ds \\
 &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a) \cdot \Gamma(c-a)} \cdot B(a, c-a-b) \\
 &= \frac{\Gamma(c) \cdot \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \cdot \Gamma(c-b)}
 \end{aligned}$$

□

Als einen Spezialfall von Korollar 5.24 ergibt sich die folgende Chu-Vandermonde-Identität .

**Korollar 5.25.** Für  $b = -n$  ergibt sich aus der Gaußschen hypergeometrischen Formel die Chu-Vandermonde-Identität.

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(a)_k}{(c)_k} = \frac{(c-a)_n}{(c)_n}$$

*Beweis.* Aus der Definition der Gaußschen hypergeometrischen Funktion erhalten wir

$$\begin{aligned} F(a, -n; c; 1) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k \cdot (-n)_k}{(c)_k \cdot k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(a)_k}{(c)_k} \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(a)_k}{(c)_k} \end{aligned}$$

Nach der Gaußschen hypergeometrischen Formel gilt andererseits

$$\begin{aligned} F(a, -n; c; 1) &= \frac{\Gamma(c) \cdot \Gamma(c-a+n)}{\Gamma(c-a) \cdot \Gamma(c+n)} \\ &= \frac{(c-a)_n}{(c)_n} \end{aligned}$$

□

## 5.4 Konfluente hypergeometrische Funktionen

**Definition 5.26.** Die konfluenten hypergeometrischen Funktionen sind definiert durch

$$\begin{aligned} M(a, c, t) &= {}_1F_1(a; c; t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{t^n}{n!} \quad \text{mit } c \notin -\mathbb{N} \end{aligned}$$

**Proposition 5.27.** *Konfluente hypergeometrische Funktionen sind Lösungen der Differentialgleichung*

$$t \cdot u''(t) + (c-t) \cdot u'(t) - a \cdot u(t) = 0$$

*Beweis.* Nach Theorem 5.6 erfüllt eine konfluente hypergeometrische Funktion  $M(t)$  die Differentialgleichung

$$L(M(t)) = \left( \frac{d}{dt} (D+c-1) - (D+a) \right) (M(t))$$

Eingesetzt ergibt sich

$$\begin{aligned}
 L(M(t)) &= \left(\frac{d}{dt} \left(t \frac{d}{dt} + c - 1\right)\right)(M(t)) - \left(t \frac{d}{dt} + a\right)(M(t)) \\
 &= \frac{d}{dt} \left(tM'(t) + (c-1)M(t)\right) - tM'(t) - aM(t) \\
 &= M'(t) + tM''(t) + (c-1)M'(t) - tM'(t) - aM(t) \\
 &= tM''(t) + (c-t)M'(t) - aM(t)
 \end{aligned}$$

□

Konfluente hypergeometrische Funktionen heissen auch Kummer-Funktionen 1. Art. Die zweite Lösung der Differentialgleichung sind Kummer-Funktionen 2. Art.

**Proposition 5.28.** *Konfluente hypergeometrische Funktionen haben folgende Integral-Darstellung*

$$M(a, c, t) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a) \cdot \Gamma(c-a)} \int_0^1 s^{a-1} \cdot (1-s)^{c-a-1} \cdot e^{st} ds$$

**Proposition 5.29.** *Konfluente hypergeometrische Funktionen erhält man aus den Gaußschen hypergeometrischen Funktionen durch Grenzübergang  $b \rightarrow \infty$ .*

$$M(a, c, t) = \lim_{b \rightarrow \infty} {}_2F_1\left(a, b; c; \frac{t}{b}\right)$$

## 6 Bessel- und Zylinder-Funktionen

Die Bessel- und Zylinder-Funktionen spielen eine wichtige Rolle in der Physik, da die Besselsche Differentialgleichung den radialen Anteil der Laplace-Gleichung bei zylindrischer Symmetrie darstellt. Wir leiten hier die Bessel-Funktionen als Lösung der Schwingungsgleichung einer kreisrunden Membran her. Weitere Beispiele für das Auftreten von Bessel-Funktionen sind Schwingungen einer Orgelpfeife, die Ausbreitung von Wasserwellen in runden Behältern, die Wärmeleitung in Stäben, die Analyse des Frequenzspektrums frequenzmodulierter Signale, die Feldverteilung im Querschnitt von Rundhohlleitern, die stationären Zustände von Kastenpotentialen und die Intensität von Lichtbeugung an kreisförmigen Löchern.

## 6.1 Schwingungsgleichung einer kreisrunden Membran

Wir betrachten ein Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  (Membran) und stellen eine Differentialgleichung für die transversale Auslenkung

$$\begin{aligned} u : \Omega \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, t) &\longmapsto u(x, y, t) \end{aligned}$$

in Abhängigkeit der Zeit auf. Der Rand des Gebietes  $\Omega$  soll dabei fest sein. Dies führt auf die Randbedingung

$$u(x, y, t) = 0 \quad \text{für alle } (x, y) \in \partial\Omega, \quad t \in \mathbb{R}$$

Mit der horizontalen Ausbreitungsgeschwindigkeit  $v \in \mathbb{R}^+$  gilt dann die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \cdot \Delta u$$

mit dem Laplace-Operator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \nabla \cdot \nabla$$

Dabei ist  $\nabla$  der Nabla-Operator

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Für eine Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  wird mit dem Nabla-Operator der Gradient bezeichnet, der die Richtung des stärksten Anstiegs von  $f$  angibt.

$$\nabla f = \text{grad } f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

**Beispiel 6.1.** Wenn das Gebiet  $\Omega = \mathbb{R}^2$  die ganze Ebene ist, dann ist die ebene Welle

$$u(x, y, t) = u_0 \cdot \sin(k_x \cdot x + k_y \cdot y + v \cdot t + \alpha)$$

mit dem Richtungsvektor

$$\bar{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix} \quad \text{mit } k_x^2 + k_y^2 = 1$$

und der Phase  $\alpha \in \mathbb{R}$  eine Lösung der Schwingungsgleichung. Denn es gilt:

$$\begin{aligned}\Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &= \frac{\partial(k_x \cdot u_0 \cdot \cos(k_x \cdot x + k_y \cdot y + v \cdot t + \alpha))}{\partial x} + \frac{\partial(k_y \cdot u_0 \cdot \cos(k_x \cdot x + k_y \cdot y + v \cdot t + \alpha))}{\partial y} \\ &= -\underbrace{(k_x^2 + k_y^2)}_{=1} \cdot u_0 \cdot \sin(k_x \cdot x + k_y \cdot y + v \cdot t + \alpha) \\ &= -u\end{aligned}$$

sowie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -v^2 \cdot u$$

und damit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \cdot \Delta u$$

### 6.1.1 Herleitung der Schwingungsgleichung

Die Schwingungsgleichung kann als Grenzfall eines diskreten Teilchensystems aufgefaßt werden. Das soll zunächst im eindimensionalen Fall einer schwingenden Saite erläutert werden. Für die Auslenkung  $u_n$  des  $n$ -ten Teilchens mit der Masse  $m_n$  greift nach der Newtonschen Bewegungsgleichung die Kraft  $F_n$  an.

$$m_n \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F_n$$

Dabei wird die Kraft durch elastische Verbindungen zwischen den Teilchen vermittelt. Mit der Elastizität  $\delta$  gilt:

$$\begin{aligned}F_n &= -\delta((u_n - u_{n-1}) + (u_n - u_{n+1})) \\ &= \delta(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n)\end{aligned}$$

Wenn die Anzahl der Teilchen immer größer wird, erhält man im Grenzfall mit der Massedichte  $\rho = \frac{dm}{dx}$  die Schwingungsgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\delta}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Im zweidimensionalen Fall einer schwingenden Membran ist die Kraft auf das ausge-

lenkte Teilchen  $n, m$  proportional zu den Verbindungen zu den Nachbarteilchen.

$$\begin{aligned} F_{n,m} &\sim ((u_{n,m} - u_{n-1,m}) + (u_{n,m} - u_{n+1,m})) \\ &\quad (u_{n,m} - u_{n,m-1}) + (u_{n,m} - u_{n,m+1})) \\ &\rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Schwingungsgleichung einer Membran.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \Delta u$$

## 6.2 Lösung durch Trennung der Variablen

Wir untersuchen nun eine Lösung der Schwingungsgleichung, indem die zeitliche von den räumlichen Variablen getrennt werden.

$$\bar{u}(x, y, t) = u(x, y) \cdot s(t)$$

Eingesetzt in die Schwingungsgleichung erhalten wir:

$$\begin{aligned} u(x, y) \cdot \ddot{s}(t) &= v^2 \cdot s(t) \cdot \Delta u(x, y) \\ \frac{\ddot{s}(t)}{v \cdot s(t)} &= \frac{\Delta u(x, y)}{u(x, y)} \end{aligned}$$

Da die linke Seite nur von  $t$  und die rechte Seite nur von  $x, y$  abhängt, müssen diese konstant ( $= \Lambda$ ) sein. Für die Funktion  $s(t)$  erhalten wir die Differentialgleichung

$$\ddot{s}(t) = \Lambda \cdot v^2 \cdot s(t)$$

mit den Lösungen

$$s(t) = e^{\pm v^2 \cdot \sqrt{\Lambda} \cdot t}$$

Für die Funktion  $u(x, y)$  gilt die Differentialgleichung

$$\Delta u(x, y) = \Lambda \cdot u(x, y)$$

Da der Laplace-Operator  $\Delta$  negativ definit ist, können wir  $\Lambda = -\lambda^2$  setzen und erhalten

$$\Delta u(x, y) = -\lambda^2 \cdot u(x, y) \quad (\text{LP1})$$

Diese Differentialgleichung betrachten wir weiter für eine kreisrunde Membran  $\Omega = D^2$  mit dem Einheitskreis  $S^1 = \partial\Omega$  als Rand. Für die weiteren Berechnungen führen wir Polar-Koordinaten ein.

$$\begin{aligned}x &= r \cdot \cos(\varphi) \\y &= r \cdot \sin(\varphi) \\ \text{mit } r &\in \mathbb{R}^+ \\ \text{und } \varphi &\in [0, 2\pi]\end{aligned}$$

Mit der unveränderten  $z$ -Koordinate sind das im Raum Zylinderkoordinaten. Aus der ursprünglichen Funktion  $u(x, y)$  wird dann eine Funktion

$$\begin{aligned}\bar{u}(r, \varphi) &= u(r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi)) \\ &= u(x, y)\end{aligned}$$

### 6.3 Laplace-Operator in Polar-Koordinaten

Wir benötigen nun eine Darstellung des Laplace-Operators in Polar-Koordinaten.

**Theorem 6.2.** *Mit den obigen Bezeichnungen gilt für den Laplace-Operator*

$$\begin{aligned}\Delta u(x, y) &= \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \\ &= \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \bar{u}(r, \varphi)\end{aligned}$$

*Beweis.* Der Beweis erfolgt durch Nachrechnen. Ausgehend von

$$\begin{aligned}\bar{u}(r, \varphi) &= u(r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi)) \\ &= u(x, y)\end{aligned}$$

erhalten wir für die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} &= u_x \cdot \cos(\varphi) + u_y \cdot \sin(\varphi) \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \varphi} &= -r \cdot u_x \cdot \sin(\varphi) + r \cdot u_y \cdot \cos(\varphi) \\ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2} &= u_{xx} \cdot \cos^2(\varphi) + 2 \cdot u_{xy} \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi) + u_{yy} \cdot \sin^2(\varphi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \varphi^2} &= r^2 \cdot u_{xx} \cdot \sin^2(\varphi) - r^2 \cdot u_{xy} \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi) - r \cdot u_x \cdot \cos(\varphi) \\ &\quad + r^2 \cdot u_{yy} \cdot \cos^2(\varphi) - r^2 \cdot u_{xy} \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi) - r \cdot u_y \cdot \sin(\varphi) \end{aligned}$$

Zusammengesetzt ergibt sich

$$\begin{aligned} r^2 \cdot \Delta u &= r^2 \cdot (u_{xx} + u_{yy}) \\ &= r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \bar{u} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \bar{u} + r \frac{\partial}{\partial r} \bar{u} \end{aligned}$$

□

Bevor wir uns der allgemeinen Lösung der Schwingungsgleichung zuwenden, betrachten wir zunächst den Spezialfall einer radialsymmetrischen Lösung.

**Beispiel 6.3.** Eine radialsymmetrische Funktion hängt nicht mehr vom Winkel  $\varphi$  ab.

$$u(r, \varphi) = u(r)$$

In diesem Fall nimmt die Differentialgleichung (LP1) folgende Form an:

$$u''(r) + \frac{1}{r} u'(r) = -\lambda^2 \cdot u(r)$$

Dies ist eine gewöhnliche, homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$r \cdot u''(r) + u'(r) + r \cdot \lambda^2 \cdot u(r) = 0$$

Diese Differentialgleichung ist eine Besselsche Differentialgleichung der Ordnung 0.

Wir untersuchen nun eine allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung mit dem Ansatz der Trennung der Variablen.

$$\bar{u}(r, \varphi) = u(r) \cdot v(\varphi)$$

Damit erhält die Schwingungsgleichung die Form

$$\begin{aligned} u'' \cdot v + \frac{1}{r} u' \cdot v + \frac{1}{r^2} u \cdot v'' &= -\lambda^2 \cdot u \cdot v \\ r^2 \left( \frac{u''}{u} + \frac{1}{r} \frac{u'}{u} + \lambda^2 \right) &= -\frac{v''}{v} \end{aligned}$$

Da die linke Seite nur von  $r$  und die rechte Seite nur von  $\varphi$  abhängt, müssen diese

konstant ( $= \nu^2$ ) sein. Für die Funktion  $v(\varphi)$  erhalten wir die Differentialgleichung

$$v'' = -\nu^2 \cdot v$$

mit den Lösungen

$$v(\varphi) = \pm \sin(\nu \cdot \varphi + \varphi_0)$$

Die linke Seite liefert nun eine gewöhnliche, homogene Differentialgleichung 2. Ordnung für die Funktion  $u(r)$ .

$$r^2 \cdot u'' + r \cdot u' + (\lambda^2 \cdot r^2 - \nu^2) \cdot u = 0$$

Nach einer Variablentransformation  $x = \lambda^2 \cdot r^2$  ergibt sich die Besselsche Differentialgleichung der Ordnung  $\nu$ .

$$x^2 \cdot u'' + x \cdot u' + (x^2 - \nu^2) \cdot u = 0 \quad (\text{BESSEL})$$

Mit dem Differential-Operator  $D = x \frac{d}{dx}$  ((DO) aus Abschnitt 5.2) erhalten wir die Besselsche Differentialgleichung in der Form

$$x^2 \cdot u + (D^2 - \nu^2) \cdot u = 0$$

Zur Lösung der Besselschen Differentialgleichung gehen wir heuristisch von zwei unterschiedlichen Ansätzen aus. Im ersten Ansatz betrachten wir die Differentialgleichung für kleine  $x$  als Störung einer einfacheren Differentialgleichung. Dies führt auf die Bessel-Funktionen 1. Art.

Im zweite Ansatz untersuchen wir die Differentialgleichung für große  $x$  als Störung einer einfacheren Differentialgleichung. Dies führt auf die Bessel-Funktionen 3. Art oder Hankel-Funktionen.

## 6.4 Bessel-Funktionen 1. Art

Für kleine  $x$  liegt eine kleine Störung der Differentialgleichung

$$(D^2 - \nu^2) \cdot u = 0$$

vor mit den Lösungen

$$u(x) = x^{\pm \nu}$$

Wir können also Lösungen der Besselschen Differentialgleichung in der Form

$$u(x) = x^{\pm\nu} \cdot f(x)$$

erwarten. Dabei ist  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$  eine holomorphe Funktion in einer Umgebung von  $x = 0$ . Dies setzen wir in die Besselsche Differentialgleichung (BESSEL) ein und erhalten:

$$\begin{aligned} x^{2+\nu} \cdot f(x) + D^2(x^\nu \cdot f(x)) - \nu^2 \cdot x^\nu \cdot f(x) &= 0 \\ x^{2+\nu} \cdot f(x) + D(\nu \cdot x^\nu \cdot f(x) + x^\nu \cdot Df(x)) - \nu^2 \cdot x^\nu \cdot f(x) &= 0 \\ x^{2+\nu} \cdot f(x) + (\nu^2 \cdot x^\nu \cdot f(x) + 2\nu x^\nu \cdot Df(x) + x^\nu \cdot D^2f(x)) - \nu^2 \cdot x^\nu \cdot f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 \cdot f(x) + 2\nu \cdot Df(x) + D^2f(x) &= 0 \end{aligned}$$

In die letzte Gleichung wird nun die Reihendarstellung für  $f(x)$  eingesetzt und man erhält eine Rekursionsformel für die Koeffizienten  $a_n$ .

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^{n+2} + 2\nu \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n^2 \cdot x^n &= 0 \\ \Rightarrow a_{n-2} + n(n+2\nu) \cdot a_n &= 0 \end{aligned}$$

Da formal  $a_{-1} = 0$  als Null angesehen werden kann, gilt nach der Rekursionsformel auch  $a_1 = 0$  und alle Koeffizienten mit ungeraden Indizes sind Null:  $a_{2m+1} = 0$ . Für die geraden Koeffizienten erhalten wir folgende Darstellung:

$$\begin{aligned} m = 1 \quad \Rightarrow \quad a_2 &= -\frac{a_0}{2 \cdot (2 + 2\nu)} \\ m = 2 \quad \Rightarrow \quad a_4 &= -\frac{a_2}{2 \cdot 2 \cdot (2 \cdot 2 + 2\nu)} \\ &= \frac{a_0}{(2 \cdot (2 \cdot 2)) \cdot ((2 + 2\nu) \cdot (2 \cdot 2 + 2\nu))} \\ &\dots \\ \text{allgemein} \quad a_{2m} &= (-1)^m \frac{a_0}{(2 \cdot (2 \cdot 2) \cdot \dots \cdot (2 \cdot m)) \cdot ((2 + 2\nu) \cdot (2 \cdot 2 + 2\nu) \cdot \dots \cdot (2 \cdot m + 2\nu))} \\ &= (-1)^m \frac{a_0}{(2^m \cdot m!) \cdot (2^m \cdot (1 + \nu) \cdot (1 + 1 + \nu) \cdot \dots \cdot (m - 1 + 1 + \nu))} \\ &= \frac{(-1)^m}{4^m} \cdot \frac{a_0}{m! \cdot (1 + \nu)_m} \end{aligned}$$

Das heißt: alle Funktionen

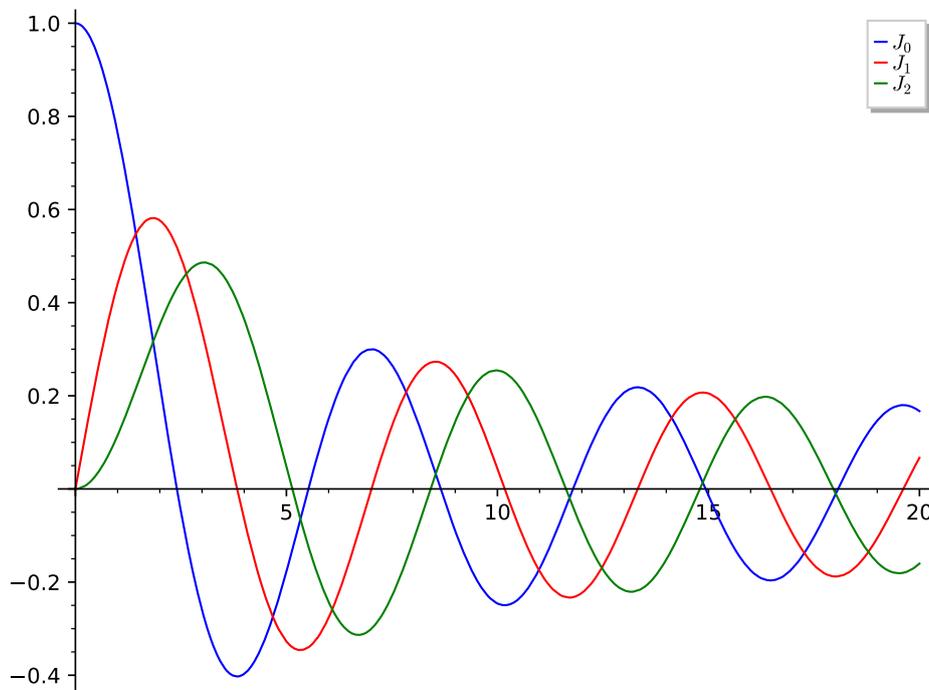
$$u(x) = x^\nu \cdot a_0 \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \cdot (1 + \nu)_m} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}$$

sind Lösungen der Besselschen Differentialgleichung (BESSEL). Wegen des Pochhammer-Symbols  $(1 + \nu)_m$  im Nenner gilt die Einschränkung

$$1 + \nu \notin -\mathbb{N}$$

Diese Einschränkung kann umgangen werden, indem  $a_0 = \frac{1}{2^\nu \cdot \Gamma(1 + \nu)}$  gesetzt wird. Wir erhalten damit die Bessel-Funktionen 1. Art

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \cdot \Gamma(1 + \nu + m)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu + 2m} \tag{J_\nu}$$



**Proposition 6.4.** *Bessel-Funktionen 1. Art besitzen mit hypergeometrischen Funktionen folgende Darstellung;*

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu {}_0F_1\left(;\nu + 1; -\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)$$

*Beweis.* Mit der Formel

$$(\nu + 1)_m = \frac{\Gamma(\nu + 1 + m)}{\Gamma(\nu + 1)}$$

für das Pochhammer-Symbol (1.1) kann der Beweis einfach nachgerechnet werden.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu {}_0F_1\left(;\nu+1; -\left(\frac{x}{2}\right)^2\right) &= \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \cdot (\nu+1)_m} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \cdot \Gamma(\nu+1+m)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2m} \\ &= J_\nu(x) \end{aligned}$$

□

Die Bessel-Funktionen haben viele Eigenschaften, die sich in Formeln ausdrücken. Dabei ist es von Bedeutung, ob die Ordnung  $\nu$  der Bessel-Funktion ganzzahlig ist oder nicht. Bessel-Funktionen mit ganzzahligem  $\nu \in \mathbb{Z}$  heissen auch Zylinder-Funktionen.

**Beispiel 6.5.** In diesem Beispiel betrachten wir die Bessel-Funktionen  $J_2$  und  $J_{-2}$ .

$$\begin{aligned} J_2 &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \cdot \Gamma(3+m)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2+2m} \\ &= \frac{1}{\Gamma(3) \cdot 0!} \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{1}{\Gamma(4) \cdot 1!} \left(\frac{x}{2}\right)^4 + \frac{1}{\Gamma(5) \cdot 2!} \left(\frac{x}{2}\right)^6 \mp \dots \end{aligned}$$

Für  $J_{-2}$  fallen die ersten 2 Summanden weg, da die Gamma-Funktion an den Stellen  $-1$  und  $0$  Pole hat und der Kehrwert Null ist.

$$\begin{aligned} J_{-2} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \cdot \Gamma(-1+m)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{-2+2m} \\ &= \underbrace{\frac{1}{\Gamma(-1) \cdot 0!}}_{=0} \left(\frac{x}{2}\right)^{-2} - \underbrace{\frac{1}{\Gamma(0) \cdot 1!}}_{=0} \left(\frac{x}{2}\right)^0 + \frac{1}{\Gamma(1) \cdot 2!} \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{1}{\Gamma(2) \cdot 3!} \left(\frac{x}{2}\right)^4 + \frac{1}{\Gamma(3) \cdot 4!} \left(\frac{x}{2}\right)^6 \mp \dots \\ &= J_2 \end{aligned}$$

Die Formel im Beispiel gilt sogar allgemeiner für ganzzahlige  $\nu$ .

**Proposition 6.6.** Für ganzzahlige  $\nu \in \mathbb{Z}$  gilt

$$J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu J_\nu(x)$$

*Beweis.* Analog wie im Beispiel erhält man für  $\nu \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 J_{-\nu} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \cdot \Gamma(-\nu + 1 + m)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2m} \\
 &= \underbrace{\frac{1}{\Gamma(-\nu + 1) \cdot 0!}}_{=0} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \underbrace{\mp \dots}_{\nu-2 \text{ mal}} \\
 &\quad + (-1)^{\nu-1} \underbrace{\frac{1}{\Gamma(-\nu + 1 + \nu - 1) \cdot (\nu - 1)!}}_{=0} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2\nu-2} \\
 &\quad + (-1)^\nu \frac{1}{\Gamma(1) \cdot \nu!} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu + (-1)^{\nu+1} \frac{1}{\Gamma(2) \cdot (\nu + 1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2} \\
 &\quad + (-1)^{\nu+2} \frac{1}{\Gamma(3) \cdot (\nu + 2)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+4} \pm \dots \\
 &= (-1)^\nu \left( \frac{1}{0! \cdot \Gamma(\nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu + \frac{(-1)^1}{1! \cdot \Gamma(\nu + 1 + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2} + \frac{(-1)^2}{2! \cdot \Gamma(\nu + 1 + 2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+4} \pm \dots \right) \\
 &= (-1)^\nu J_\nu
 \end{aligned}$$

□

Das nächste Theorem widmet sich Rekursionsformeln.

**Theorem 6.7.** Für die Bessel-Funktionen 1. Art gelten folgende Rekursionsformeln:

(i)

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x)$$

(ii)

$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2 J'_\nu(x)$$

*Beweis.* ad (i) Die erste Formel beweisen wir mithilfe der Reihenentwicklung.

$$\begin{aligned}
 J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \cdot \Gamma(\nu + m)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1+2m} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot \Gamma(2 + \nu + n)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+1+2n} \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1+2m} \cdot \left( \frac{1}{\Gamma(\nu + m)} - \frac{m}{\Gamma(1 + \nu + m)} \right) \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1+2m} \cdot \left( \frac{\nu + m}{\Gamma(1 + \nu + m)} - \frac{m}{\Gamma(1 + \nu + m)} \right) \\
 &= \frac{2\nu}{x} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2m} \cdot \frac{1}{\Gamma(1 + \nu + m)} \\
 &= \frac{2\nu}{x} \cdot J_\nu
 \end{aligned}$$

ad (ii) Für die zweite Formel wird die Reihenentwicklung abgeleitet.

$$\begin{aligned}
 (x^\nu \cdot J_\nu)' &= \nu \cdot x^{\nu-1} \cdot J_\nu + x^\nu \cdot J'_\nu \\
 &= \nu \cdot x^{\nu-1} \cdot \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \cdot \Gamma(1 + \nu + m)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2m} \right) \\
 &\quad + x^\nu \cdot \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \cdot \Gamma(1 + \nu + m)} \cdot (\nu + 2m) \cdot \left(\frac{x^{\nu+2m-1}}{2^{\nu+2m}}\right) \right) \\
 &= x^\nu \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \cdot \Gamma(1 + \nu + m)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2m-1} \cdot \underbrace{\left(\frac{\nu}{2} + \frac{\nu + 2m}{2}\right)}_{=\nu+m} \\
 &= x^\nu \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \cdot \Gamma(\nu + m)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2m-1} \\
 &= x^\nu \cdot J_{\nu-1}
 \end{aligned}$$

Analog berechnet man:

$$\begin{aligned}
 (x^{-\nu} \cdot J_\nu)' &= -\nu \cdot x^{-\nu-1} \cdot J_\nu + x^{-\nu} \cdot J'_\nu \\
 &= -\nu \cdot x^{-\nu-1} \cdot \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \cdot \Gamma(1 + \nu + m)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2m} \right) \\
 &\quad + x^{-\nu} \cdot \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \cdot \Gamma(1 + \nu + m)} \cdot (\nu + 2m) \cdot \left(\frac{x^{\nu+2m-1}}{2^{\nu+2m}}\right) \right) \\
 &= x^{-\nu-1} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \cdot \Gamma(1 + \nu + m)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2m} \cdot (-\nu + \nu + 2m) \\
 &= x^{-\nu} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m-1)! \cdot \Gamma(1 + \nu + m)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2m-1} \\
 &= -x^{-\nu} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot \Gamma(2 + \nu + n)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2n+1} \\
 &= -x^{-\nu} \cdot J_{\nu+1}
 \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
 x^{1-\nu}(x^\nu \cdot J_\nu)' &= x \cdot J'_\nu + \nu \cdot J_\nu \\
 x^{1+\nu}(x^{-\nu} \cdot J_\nu)' &= x \cdot J'_\nu - \nu \cdot J_\nu \\
 \hline
 x^{1-\nu}(x^\nu \cdot J_\nu)' + x^{1+\nu}(x^{-\nu} \cdot J_\nu)' &= 2 \cdot x \cdot J'_\nu \\
 \Rightarrow J_{\nu-1} - J_{\nu+1} &= 2 \cdot J'_\nu
 \end{aligned}$$

□

Aus den Ableitungsformeln von  $(x^{\pm\nu} J_\nu)'$  in obigem Beweis erhält man folgende, allgemeinere Formeln.

**Korollar 6.8.** Für Bessel-Funktionen gelten folgende Ableitungsformeln:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n (x^\nu J_\nu) &= x^{\nu-n} \cdot J_{\nu-n} \\ \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n (x^{-\nu} J_\nu) &= (-1)^n x^{-\nu-n} \cdot J_{\nu+n} \end{aligned}$$

Eine wichtige Eigenschaft der Bessel-Funktionen ist ihr asymptotisches Verhalten in der Umgebung von Null.

**Proposition 6.9.** Für  $x, \nu \in \mathbb{R}$  und  $|x| < \epsilon$  erhält man mit dem ersten Summanden eine gute Näherung.

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &\sim \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \\ J_{-\nu}(x) &\sim \frac{1}{\Gamma(-\nu+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \end{aligned}$$

Analog gilt für die Ableitung

$$\begin{aligned} J'_\nu(x) &\sim \frac{\nu}{2} \cdot \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1} \\ J'_{-\nu}(x) &\sim -\frac{\nu}{2} \cdot \frac{1}{\Gamma(-\nu+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-1} \end{aligned}$$

Für  $\nu = \frac{1}{2}$  und  $\nu = -\frac{1}{2}$  haben die Bessel-Funktionen eine einfache Form.

**Proposition 6.10.** Für  $\nu = \frac{1}{2}$  und  $\nu = -\frac{1}{2}$  sind die Bessel-Funktionen:

$$\begin{aligned} J_{\frac{1}{2}}(x) &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi x}} \cdot \sin(x) \\ J_{-\frac{1}{2}}(x) &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi x}} \cdot \cos(x) \end{aligned}$$

*Beweis.* Mit der Reihenentwicklung für Bessel-Funktionen erhalten wir

$$\begin{aligned} J_{\frac{1}{2}}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(\frac{1}{2} + 1 + m) \cdot m!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2m} \\ &= \sqrt{\frac{2}{x}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(\frac{1}{2} + 1 + m) \cdot \Gamma(1 + m)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{1+2m} \end{aligned}$$

Nun wenden wir die Legendresche Verdoppelungsformel 1.24 auf  $\Gamma(\frac{1}{2} + 1 + m) \cdot \Gamma(1 + m)$

an und erhalten:

$$\begin{aligned} J_{\frac{1}{2}}(x) &= \sqrt{\frac{2}{x}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \cdot \frac{2^{2m+1}}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{1+2m} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi x}} \cdot \sin(x) \end{aligned}$$

Analog berechnet man

$$\begin{aligned} J_{-\frac{1}{2}}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(-\frac{1}{2} + 1 + m) \cdot m!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+2m} \\ &= \sqrt{\frac{2}{x}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(\frac{1}{2} + m) \cdot \Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + m)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \\ &= \sqrt{\frac{2}{x}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \cdot \frac{2^{2m}}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi x}} \cdot \cos(x) \end{aligned}$$

□

Mit der Rekursionsformel aus Theorem 6.7 folgt, dass für  $\nu + \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$  die Bessel-Funktionen  $J_\nu$  und ihre Ableitungen  $J'_\nu$  als Summe von Produkten trigonometrischer Funktionen mit Potenzen von  $x$  versehen mit dem Faktor  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi x}}$  darstellbar sind. In Proposition 6.6 haben wir gesehen, dass für ganzzahlige  $\nu$  die Bessel-Funktionen  $J_\nu$  und  $J_{-\nu}$  bis auf das Vorzeichen identisch sind. Sie bilden daher nur eine Dimension des Lösungsraumes der Besselschen Differentialgleichung. Anders ist die Situation für nicht ganzzahlige  $\nu$ .

**Theorem 6.11.** Für  $\nu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  sind die Bessel-Funktionen  $J_\nu$  und  $J_{-\nu}$  zwei linear unabhängige Fundamentallösungen der Besselschen Differentialgleichung.

*Beweis.* Zum Beweis bilden wir die Wronski-Determinante

$$w_\nu = \det \begin{pmatrix} J_\nu & J_{-\nu} \\ J'_\nu & J'_{-\nu} \end{pmatrix}$$

Nach dem Satz von Abel 4.13 erfüllt  $w_\nu$  die Differentialgleichung

$$w'_\nu(x) = -\frac{x}{x^2} \cdot w_\nu(x)$$

mit der Lösung  $w_\nu(x) = \frac{c}{x}$ . Die Konstante  $c$  wird durch Einsetzen der Näherungsformeln bestimmt.

$$\begin{aligned} w_\nu(x) &\sim \frac{\nu}{2} \cdot \frac{1}{\Gamma(\nu+1) \cdot \Gamma(-\nu+1)} \cdot \det \begin{pmatrix} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu & \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \\ \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1} & -\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\nu}{2} \cdot \frac{1}{\nu \cdot \Gamma(\nu) \cdot \Gamma(1-\nu)} \cdot (-2) \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{-1} \\ &= -2 \cdot \frac{\sin(\nu\pi)}{\pi x} \end{aligned}$$

Denn nach der Eulerschen Spiegelungsformel 1.22 für die Gamma-Funktion gilt

$$\Gamma(\nu) \cdot \Gamma(1-\nu) = \frac{\pi}{\sin(\nu\pi)}$$

Somit ist die Wronski Determinante  $w_\nu$  genau dann ungleich Null, wenn  $\nu$  nicht ganzzahlig ist. □

## 6.5 Bessel-Funktionen 2. Art

Als gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung hat die Besselsche Differentialgleichung einen zwei-dimensionalen Lösungsraum. Ausgehend von einer Störung der Besselschen Differentialgleichung für kleine  $x$  haben wir im Abschnitt 6.4 mit den Bessel-Funktionen 1. Art zwei linear unabhängige Lösungen gefunden mit der Einschränkung, dass  $\nu \notin \mathbb{Z}$  nicht ganzzahlig ist.

Um auch für ganzzahlige  $\nu \in \mathbb{Z}$  eine zweite, linear unabhängige Lösung der Besselschen Differentialgleichung zu finden, definieren wir Bessel-Funktionen 2. Art.

**Definition 6.12.** Seien  $J_\nu$  für  $\nu \notin \mathbb{Z}$  Bessel-Funktionen 1. Art. Die Linearkombination

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cdot \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}$$

heisst Bessel-Funktion 2. Art.

**Bemerkung 6.13.** Als Linearkombination von Lösungen der Besselschen Differentialgleichung sind die Bessel-Funktionen  $Y_\nu$  natürlich wieder eine Lösung.

Bildet man den Grenzübergang  $\nu \rightarrow n \in \mathbb{Z}$ , dann ist auch

$$\lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(x) = Y_n(x)$$

eine Lösung. Mit der Regel von de L'Hospital erhält man:

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu &= \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{J_\nu \cdot \cos(\nu \pi) - J_{-\nu}}{\sin(\nu \pi)} \\ &= \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\frac{d}{d\nu} J_\nu \cdot \cos(\nu \pi) - \pi \cdot J_\nu \cdot \sin(\nu \pi) - \frac{d}{d\nu} J_{-\nu}}{\pi \cdot \cos(\nu \pi)} \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{d}{d\nu} J_\nu \Big|_{\nu=n} - (-1)^n \frac{d}{d\nu} J_{-\nu} \Big|_{\nu=n} \right) \end{aligned}$$

**Proposition 6.14.** Für alle  $\nu \in \mathbb{C}$  sind die Bessel-Funktionen  $J_\nu$  und  $Y_\nu$  zwei linear unabhängige Lösungen der Besselschen Differentialgleichung.

*Beweis.* Zum Beweis bilden wir die Wronski-Determinante  $W(J_\nu, Y_\nu)$  und berechnen zunächst die Ableitung von  $Y_\nu$ .

$$Y'_\nu(x) = \frac{J'_\nu(x) \cdot \cos(\nu \pi) - J'_{-\nu}(x)}{\sin(\nu \pi)}$$

Die Wronski-Determinante ergibt sich nun aus

$$\begin{aligned} W(J_\nu, Y_\nu) &= \frac{1}{\sin(\nu \pi)} \cdot \det \begin{pmatrix} J_\nu & Y_\nu \\ J'_\nu & Y'_\nu \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sin(\nu \pi)} \cdot \det \begin{pmatrix} J_\nu & J_\nu \cdot \cos(\nu \pi) - J_{-\nu} \\ J'_\nu & J'_\nu \cdot \cos(\nu \pi) - J'_{-\nu} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sin(\nu \pi)} \cdot \det \begin{pmatrix} J_\nu & -J_{-\nu} \\ J'_\nu & -J'_{-\nu} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sin(\nu \pi)} \cdot 2 \cdot \frac{\sin(\nu \pi)}{\pi x} \quad \text{nach Theorem 6.11} \\ &= \frac{2}{\pi x} \end{aligned}$$

□

### 6.6 Bessel-Funktionen 3. Art

Mit den Bessel-Funktionen 3. Art erhalten wir zwei linear unabhängige Lösungen der Besselschen Differentialgleichung für alle  $\nu \in \mathbb{C}$ .

**Definition 6.15.** Seien  $J_\nu$  und  $Y_\nu$  Bessel-Funktionen 1. Art und 2. Art. Die Linear-

kombinationen

$$\begin{aligned}H_\nu^{(1)}(x) &= J_\nu(x) + i \cdot Y_\nu(x) \\H_\nu^{(2)}(x) &= J_\nu(x) - i \cdot Y_\nu(x)\end{aligned}$$

heissen Bessel-Funktionen 3. Art oder auch Hankel-Funktionen.

Die Bessel-Funktionen 3. Art erhält man auch, wenn die Besselsche Differentialgleichung für große  $x$  betrachtet wird. Dann liegt eine Störung der Differentialgleichung

$$u'' + \frac{1}{x} \cdot u' + u = 0$$

vor. Diese läßt sich mit der Eichtransformation

$$\begin{aligned}u(x) &= x^{-\frac{1}{2}} \cdot v(x) \\u'(x) &= -\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{3}{2}} \cdot v(x) + x^{-\frac{1}{2}} \cdot v'(x) \\u''(x) &= \frac{3}{4} \cdot x^{-\frac{5}{2}} \cdot v(x) - x^{-\frac{3}{2}} \cdot v'(x) + x^{-\frac{1}{2}} \cdot v''(x)\end{aligned}$$

in folgende Form überführen:

$$\begin{aligned}\frac{3}{4} \cdot x^{-\frac{5}{2}} \cdot v(x) - x^{-\frac{3}{2}} \cdot v'(x) + x^{-\frac{1}{2}} \cdot v''(x) - \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{5}{2}} \cdot v(x) + x^{-\frac{3}{2}} \cdot v'(x) + x^{-\frac{1}{2}} \cdot v(x) &= 0 \\v''(x) + \left(1 + \frac{1}{4x^2}\right) \cdot v &= 0\end{aligned}$$

Für große  $x$  erhalten wir asymptotisch die Differentialgleichung  $v'' + v = 0$  mit den Lösungen  $v = c \cdot e^{\pm ix}$ . Wir können also Lösungen der Besselschen Differentialgleichung in folgender Form erwarten.

$$u(x) = x^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{\pm ix} \cdot g_\nu(x)$$

## 7 Lambertsche W-Funktion

Johann Lambert [Lam58] fand die W-Funktion 1758 bei seinen Überlegungen. Leonhard Euler [Eul83] griff die Arbeiten von Lambert 1783 auf und veröffentlichte eine eigene Beschreibung der W-Funktion. Beide Original Schriften sind eingescannt und als PDF verfügbar und - wie damals üblich - in lateinischer Sprache verfaßt.

Die W-Funktion spielt bei vielen Fragestellungen eine Rolle. Hier seien nur einige Beispiele genannt.

- Orthogonale Trajektorien einer Familie von Ellipsen der Form

$$x^2 + (1 - \epsilon^2)y^2 = \epsilon^2$$

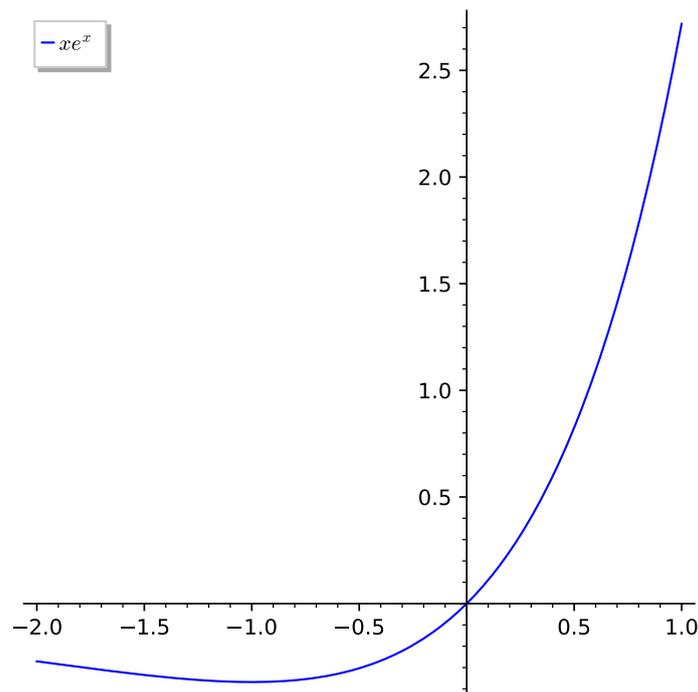
- In der Kombinatorik
- Bei der Lösung der Schrödinger Gleichung in der Quantenmechanik
- Beschreibung der Schwarzschild-Lösung der Einsteinschen Gleichungen in der Relativitätstheorie

In dieser Vorlesung werden die Herleitung, Definition und einige wichtige Eigenschaften der W-Funktion erläutert.

## 7.1 Herleitung der Lambertschen W-Funktion

Die Lambertsche W-Funktion ist die Umkehrfunktion von

$$z = f(x) = x \cdot e^x$$



Die Funktion  $f(x)$  ist holomorph mit einer Nullstelle bei  $x = 0$ . Die Ableitung lautet

$$f'(x) = (1 + x) \cdot e^x = e^{-1} \cdot f(x + 1)$$

Die Steigung an der Nullstelle  $x = 0$  beträgt somit  $f'(0) = 1$ . Die Funktion besitzt ein Minimum bei  $x = -1$  mit dem Funktionswert  $f(-1) = -e^{-1}$ .

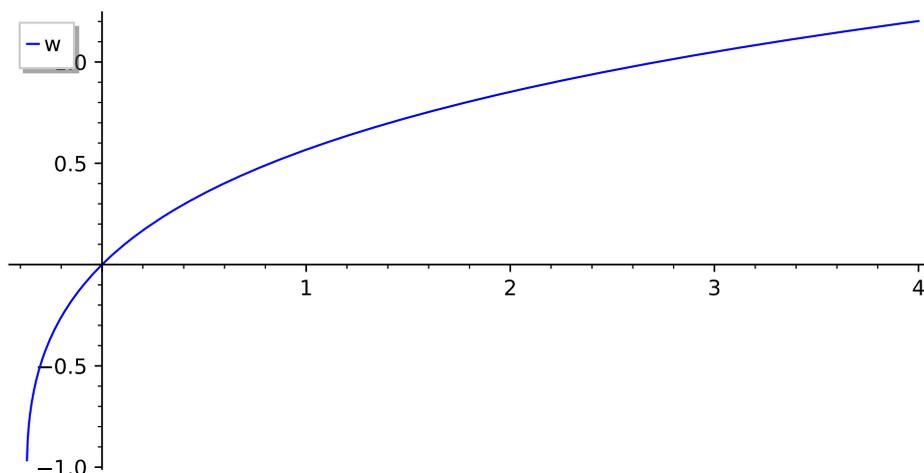
**Definition 7.1.** Die Umkehrfunktion  $w(z)$  von  $z = x \cdot e^x$  heisst Lambertsche W-Funktion oder Omega-Funktion.

$$w(z) \cdot e^{w(z)} = z \tag{W}$$

Der Hauptzweig

$$w_0 : [-e^{-1}, \infty[ \rightarrow [-1, \infty[$$

ist monoton wachsend.



Äquivalente Formulierungen der Bestimmungsgleichung sind:

$$e^{w(z)} = \frac{z}{w(z)} \tag{W1}$$

$$\begin{aligned} w(z) &= \ln(z) - \ln(w(z)) \\ \ln(w(z)) &= \ln(z) - w(z) \end{aligned}$$

Mit  $w(z) = \ln(y)$  erhält man aus der Definitionsgleichung:

$$\begin{aligned} w(z) \cdot e^{w(z)} &= z \\ \Rightarrow w(w(z) \cdot e^{w(z)}) &= w(z) \end{aligned}$$

und damit

$$w(y \ln(y)) = \ln(y) \tag{W2}$$

Wegen  $x^{x+1} \cdot \ln(x) = x \cdot e^{x \cdot \ln(x)} \cdot \ln(x) = \underbrace{x \cdot \ln(x)}_{=y} \cdot e^{x \cdot \ln(x)}$  gilt auch

$$w(x^{x+1} \cdot \ln(x)) = x \cdot \ln(x)$$

## 7.2 Eigenschaften der Lambertschen W-Funktion

**Proposition 7.2.** Die Ableitung der Lambertschen W-Funktion lautet:

$$w'(z) = \frac{w(z)}{(1+w(z)) \cdot z}$$

*Beweis.* Die Definitionsgleichung (W) wird nach  $z$  abgeleitet.

$$\begin{aligned} w'(z) \cdot e^{w(z)} + w \cdot w'(z) \cdot e^{w(z)} &= 1 \\ \Rightarrow w'(z) &= \frac{1}{(1+w(z)) \cdot e^{w(z)}} \\ \text{(W)} \Rightarrow w'(z) &= \frac{w(z)}{(1+w(z)) \cdot z} \end{aligned}$$

□

**Proposition 7.3.** Die Stammfunktion der Lambertschen W-Funktion ist:

$$\int w(z) dz = z \cdot (w(z) - 1) + \frac{1}{w(z)}$$

*Beweis.* Zum Beweis wird die rechte Seite nach  $z$  abgeleitet.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left( z \cdot (w(z) - 1) + \frac{1}{w(z)} \right) &= w(z) - 1 + \frac{1}{w(z)} + z \cdot \left( w'(z) - \frac{w'(z)}{w(z)^2} \right) \\ &= w(z) - 1 + \frac{1}{w(z)} + z \cdot \frac{w(z)}{(1+w(z)) \cdot z} \cdot \frac{(w(z) - 1) \cdot (w(z) + 1)}{w(z)^2} \\ &= w(z) - 1 + \frac{1}{w(z)} + \frac{w(z) - 1}{w(z)} \\ &= w(z) \end{aligned}$$

□

**Proposition 7.4.** *Spezielle Werte der Lambertschen W-Funktion sind:*

$$\begin{aligned} w(0) &= 0 \\ w(e) &= 1 \\ w(-e^{-1}) &= -1 \\ w(1) &= \Omega \approx 0,567\dots \end{aligned}$$

Wichtig ist noch der Wert der Ableitung an der Stelle 0.

$$w'(0) = \frac{1}{(1 + w(0)) \cdot e^{w(0)}} = 1$$

**Bemerkung 7.5.** Die Omega-Konstante  $\Omega$  ist implizit durch die Formel  $\Omega \cdot e^\Omega = 1$  gegeben. Sie erhielt ihren Namen von der Omega-Funktion.

**Bemerkung 7.6.** Wegen  $\frac{1}{\Omega} = e^\Omega$  schneiden sich die Funktionen  $e^x$  und  $\frac{1}{x}$  in  $x = \Omega$ .

**Bemerkung 7.7.**  $\Omega$  ist eine transzendente Zahl. Wäre  $\Omega$  algebraisch, dann wäre nach dem Satz von Lindemann-Weierstraß  $e^{-\Omega}$  transzendent. Das widerspricht aber  $e^{-\Omega} = \Omega$ , so dass  $\Omega$  eine transzendente Zahl sein muss.

**Bemerkung 7.8.** Ähnlich wie die Logarithmus-Funktion  $\ln(z)$  als Umkehrfunktion der Exponential-Funktion  $e^x$  ist auch die Lambertsche W-Funktion  $w(z)$  als Umkehrfunktion von  $x \cdot e^x$  vieldeutig.

### 7.3 Komposition von Potenzreihen

Sei  $R$  ein kommutativer Ring mit Eins-Element. Dann bezeichnet  $R[[x]]$  den Ring der formalen Potenzreihen.

Die Ordnung einer Potenzreihe  $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot x^i$  ist definiert durch

$$\text{ord}(f) = \min\{i \in \mathbb{N} \mid a_i \neq 0\}$$

Seien  $y = f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot x^i$  und  $g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot y^n$  zwei Potenzreihen, wobei die Ordnung von  $f(x)$  größer als Null sein soll ( $\text{ord}(f) \geq 1$ ). Insbesondere gilt dann  $a_0 = 0$ . Dann ist die Komposition  $g(f(x))$  wieder einer Potenzreihe und es gilt:

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= \sum_{j=0}^{\infty} c_j \cdot x^j \\ \text{mit } c_j &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sum_{i_1+\dots+i_n=j} a_{i_1} \cdots a_{i_n} \end{aligned}$$

Die Voraussetzung  $a_0 = 0$  ist wichtig, da sonst die Koeffizienten der Komposition keine Polynome in den Ausgangs Koeffizienten  $a_i$  und  $b_n$  wären, sondern unendliche Summen. Bereits der 0-te Koeffizient wäre

$$c_0 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot a_0^n$$

Falls zusätzlich zu  $a_0 = 0$   $a_1$  eine Einheit im Ring  $R$  ist, dann ist die Umkehrfunktion von  $f(x)$  ebenfalls eine Potenzreihe.

### 7.4 Umkehrfunktion einer holomorphen Funktion

**Theorem 7.9.** Lagrangesche Inversionsformel

Gegeben sei eine holomorphe Funktion  $y = f(x)$  in einer Umgebung von  $x_0 = 0$  mit  $f(0) = 0$  und  $f'(x) \neq 0$ . Dann ist  $f(x)$  als Potenzreihe darstellbar

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$$

und es existiert eine holomorphe Umkehrfunktion  $f^{-1}(y)$  mit der Darstellung

$$f^{-1}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \left[ \left( \frac{d}{dx} \right)^{n-1} \cdot \left( \frac{x}{f(x)} \right)^n \right]_{x=0}$$

Da die Funktion  $f(x) = x \cdot e^x$  in einer Umgebung von 0 holomorph ist, erhalten wir als Folgerung der Lagrangeschen Inversionsformel, dass auch die Lambertsche W-Funktion in einer Umgebung von 0 holomorph ist und eine Darstellung als Potenzreihe besitzt.

**Korollar 7.10.** Die Lambertsche W-Funktion besitzt in einer Umgebung von 0 folgende Darstellung als Potenzreihe:

$$w(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} y^n$$

*Beweis.* Die Koeffizienten der Umkehrfunktion von  $f(x) = x \cdot e^x$  berechnen sich aus der Lagrangeschen Inversionsformel zu:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dx} \right)^{n-1} \left( \frac{x}{x \cdot e^x} \right)^n \Big|_{x=0} &= \left( \frac{d}{dx} \right)^{n-1} e^{-nx} \Big|_{x=0} \\ &= (-n)^{n-1} e^{-nx} \Big|_{x=0} \\ &= (-n)^{n-1} \end{aligned}$$

□

Der Konvergenzradius der Lambertschen W-Funktion ergibt sich nun mit Hilfe der Hadamardschen und der Stirlingschen Formel.

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^{n-1}}{n!}}} \\ &= \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^{n-1} e^n}{\sqrt{2\pi n} n^n}}} \\ &= \frac{1}{e} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2\pi n^3} \\ &= \frac{1}{e} \end{aligned}$$

## 7.5 Lösungen einiger transzendenter Gleichungen mit der Lambertschen W-Funktion

Mit Hilfe der Lambertschen W-Funktion lassen sich die Lösungen verschiedener transzendenter Gleichungen in einfacher Weise darstellen. Transzendente Gleichungen liegen vor, wenn nicht nur polynomiale Ausdrücke, sondern zum Beispiel auch e-Funktionen oder Logarithmus-Funktionen verwendet werden.

In den folgenden Beispielen ist  $0 < b \in \mathbb{R}$  stets eine positive, reelle Zahl.

**Beispiel 7.11.** Die Gleichung

$$x \cdot b^x = a$$

besitzt die Lösung

$$x = \frac{w(a \ln(b))}{\ln(b)} = w_b(a)$$

Zum Beweis wird die Gleichung in die Form  $y \cdot e^y = z$  gebracht. Wir multiplizieren die Gleichung auf beiden Seiten mit  $\ln(b)$  und erhalten:

$$\begin{aligned} \ln(b) \cdot x \cdot b^x &= a \cdot \ln(b) \\ \ln(b) \cdot x \cdot e^{\ln(b) \cdot x} &= a \cdot \ln(b) \\ \Rightarrow \ln(b) \cdot x &= w(a \cdot \ln(b)) \\ x &= \frac{w(a \ln(b))}{\ln(b)} \end{aligned}$$

**Beispiel 7.12.** Die Gleichung

$$x \cdot \log_b(x) = a$$

besitzt die Lösung

$$x = b^{w_b(a)} = \frac{a}{w_b(a)}$$

Ersetzt man  $x = b^y$ , erhält man  $b^y \cdot b = a$  und damit Beispiel 7.11 mit der Lösung

$$\begin{aligned} y &= w_b(a) \\ \Rightarrow x &= b^{w_b(a)} \\ &= e^{\ln(b) \cdot w_b(a)} \\ &= e^{\ln(b) \cdot \frac{w(a \cdot \ln(b))}{\ln(b)}} \\ &= e^{w(a \cdot \ln(b))} \\ &= \frac{a \cdot \ln(b)}{w(a \cdot \ln(b))} \quad \text{nach (W1)} \\ &= \frac{a}{w_b(a)} \end{aligned}$$

**Beispiel 7.13.** Die Gleichung

$$x + \log_b(x) = a$$

besitzt die Lösung

$$x = w(b^a)$$

Denn durch Potenzierung mit  $b$  wird die Gleichung auf Beispiel 7.11 zurückgeführt.

**Beispiel 7.14.** Die Gleichung

$$x + b^x = a$$

besitzt die Lösung

$$x = \log_b(w(b^a))$$

Denn durch  $y = b^x$  wird die Gleichung auf Beispiel 7.13 zurückgeführt:

$$\log_b(y) + y = a$$

Somit lautet die Lösung

$$\begin{aligned} y &= w_b(b^a) \\ \Rightarrow x &= \log_b(w_b(b^a)) \end{aligned}$$

**Beispiel 7.15.** Die Gleichung

$$x^x = a$$

besitzt die Lösung

$$x = \frac{\ln(a)}{w(\ln(a))}$$

Denn durch Logarithmierung erhält man Beispiel 7.12

$$x \cdot \ln(x) = \ln(a)$$

und die Lösung.

## 8 Die j-Funktion

Die j-Funktion ist eng mit Gittern  $\Lambda = \omega_1 \mathbb{Z} + \omega_2 \mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$  und elliptischen Funktionen aus Abschnitt 3 verknüpft.

**Definition 8.1.** Für  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  heisst die Abbildung

$$\begin{aligned} \Lambda &\longrightarrow \tilde{\Lambda} = \lambda \cdot \Lambda \\ \omega_1 \cdot n_1 + \omega_2 \cdot n_2 &\longmapsto \lambda \cdot \omega_1 \cdot n_1 + \lambda \cdot \omega_2 \cdot n_2 \end{aligned}$$

Homothetie.

Die Homothetie ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Gitter. Ein normierter Repräsentant einer Äquivalenzklasse ist

$$\Lambda = 1 \cdot \mathbb{Z} + \tau \cdot \mathbb{Z}$$

mit  $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$  aus der oberen, komplexen Halbebene

$$\mathbb{H} = \{ z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0 \}$$

**Proposition 8.2.** *Eisenstein-Reihen*

$$G_n^\Lambda = \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^n}$$

haben das Gewicht  $-n$  bezüglich Homothetien. Das heisst, es gilt

$$G_n^{\lambda \cdot \Lambda} = \lambda^{-n} \cdot G_n^\Lambda$$

Nach Theorem 3.25 lassen sich alle Eisenstein-Reihen mit  $n > 6$  als Polynome in den

Gitter-Konstanten

$$\begin{aligned}g_2 &= 60 \cdot G_4 \\g_3 &= 140 \cdot G_6\end{aligned}$$

mit rationalen Koeffizienten darstellen.

Die dem Gitter zugeordnete elliptische Kurve hat die Gleichung

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$$

Nach Korollar 3.29 lautet die Diskriminante der rechten Seite

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$$

Diese hat das Gewicht 12 bezüglich Homothetie.

**Definition 8.3.** Die Abbildung

$$\begin{aligned}j : \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \tau &\longmapsto \underbrace{12^3}_{=1728} \cdot \frac{g_2^3}{\Delta}\end{aligned}$$

heißt  $j$ -Funktion oder  $j$ -Invariante des Gitters  $\Lambda = 1 \cdot \mathbb{Z} + \tau \cdot \mathbb{Z}$  beziehungsweise der elliptischen Funktion oder Kurve.

**Proposition 8.4.** *Die  $j$ -Funktion ist invariant gegenüber Homothetien.*

**Bemerkung 8.5.** Zwei elliptische Kurven sind genau dann isomorph, wenn ihre  $j$ -Invarianten übereinstimmen.

## 8.1 Modulgruppe

**Definition 8.6.** Eine Möbius-Transformation ist definiert durch die Abbildung

$$\begin{aligned}\hat{\mathbb{C}} &\longrightarrow \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ z &\longmapsto \frac{az + b}{cz + c} = A(z) \\ &\text{mit } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &\text{und } \det(A) = 1\end{aligned}$$

Alle Möbius-Transformationen bilden die projektive, spezielle Gruppe

$$PSL_2(\mathbb{C}) \subseteq GL_2(\mathbb{C})$$

**Proposition 8.7.** *Zwei Gitter  $\Lambda = \omega_1 \mathbb{Z} + \omega_2 \mathbb{Z}$  und  $\Lambda' = \omega'_1 \mathbb{Z} + \omega'_2 \mathbb{Z}$  sind genau dann gleich, wenn es eine Matrix  $A \in PSL_2(\mathbb{Z})$  gibt, so dass gilt*

$$\begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$$

*Beweis.* Insbesondere müssen die Gitterpunkte  $\omega'_1$  und  $\omega'_2$  aus dem Gitter  $\Lambda'$  im Gitter  $\Lambda$  vorkommen. Das heisst, es gibt Zahlen  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ , so dass gilt:

$$\begin{aligned} \omega'_1 &= a \cdot \omega_1 + b \cdot \omega_2 \\ \omega'_2 &= c \cdot \omega_1 + d \cdot \omega_2 \end{aligned}$$

Diese bilden eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Umgekehrt gibt es aber auch eine Matrix

$$A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} \omega_1 &= a' \cdot \omega'_1 + b' \cdot \omega'_2 \\ \omega_2 &= c' \cdot \omega'_1 + d' \cdot \omega'_2 \end{aligned}$$

Da die Hintereinanderausführung von  $A$  und  $A'$  wieder  $\omega_1$  und  $\omega_2$  ergibt, muss das Produkt  $AA' = E$  die Einheitsmatrix ergeben. Somit ist die Determinante  $\det(A) = \pm 1$ . Da beide Gitter die gleiche Orientierung haben müssen, gilt  $\det(A) = 1$ .  $\square$

**Korollar 8.8.** *Zwei normierte Gitter  $\Lambda = \mathbb{Z} + \tau \mathbb{Z}$  mit  $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$  und  $\Lambda' = \mathbb{Z} + \tau' \mathbb{Z}$  mit  $\tau' = \frac{\omega'_2}{\omega'_1}$  sind genau dann gleich, wenn  $\tau'$  durch eine Möbius-Transformation mit ganzen Zahlen aus  $\tau$  hervorgeht. Das heisst, dass es ganze Zahlen  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  mit  $a \cdot d - b \cdot c = 1$  gibt, so dass gilt:*

$$\tau' = \frac{c + d\tau}{a + b\tau}$$

**Definition 8.9.** Die Möbius-Transformationen auf  $\mathbb{Z}$  bilden die Modulgruppe  $PSL_2(\mathbb{Z})$ .

**Bemerkung 8.10.** Die Modulgruppe operiert auf der oberen komplexen Halbebene  $\mathbb{H}$ . Da jedem  $\tau \in \mathbb{H}$  ein Gitter  $\Lambda = 1\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$  entspricht, kann eine Bahn als verschiedene Darstellungen eines Gitters aufgefaßt werden.

Wir betrachten nun zwei spezielle Möbius-Transformationen in der Modulgruppe.

**Beispiel 8.11.** Die Möbius-Transformation

$$\begin{aligned} T: \hat{\mathbb{C}} &\longrightarrow \hat{\mathbb{C}} \\ \tau &\longmapsto \tau + 1 \end{aligned}$$

entspricht der Matrix

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in  $PSL_2(\mathbb{Z})$ .

**Beispiel 8.12.** Die Möbius-Transformation

$$\begin{aligned} J: \hat{\mathbb{C}} &\longrightarrow \hat{\mathbb{C}} \\ \tau &\longmapsto -\frac{1}{\tau} \end{aligned}$$

entspricht der Matrix

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

in  $PSL_2(\mathbb{Z})$ .

Die folgende Aussage ist nicht allzu schwer zu beweisen.

**Proposition 8.13.** Die beiden oben definierten Möbius-Transformationen  $T$  und  $J$  erzeugen die Modulgruppe  $PSL_2(\mathbb{Z})$ .

**Definition 8.14.** Eine Funktion  $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  heisst Modulfunktion, wenn sie invariant gegenüber Möbius-Transformationen der Modulgruppe  $PSL_2(\mathbb{Z})$  ist. Das heisst, für alle

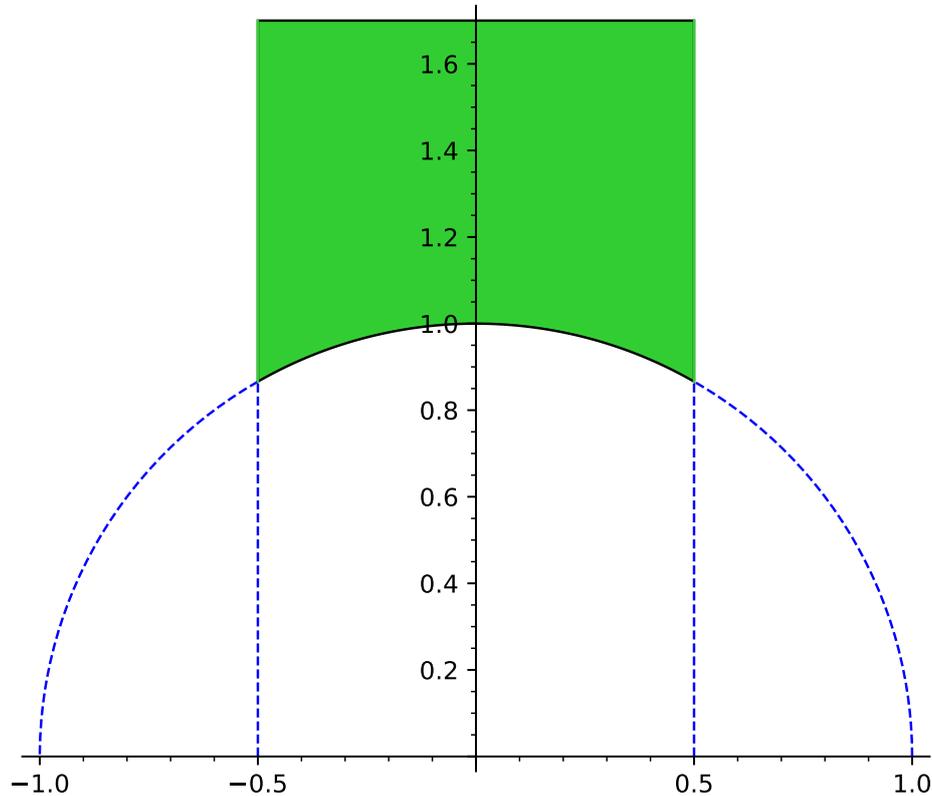
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL_2(\mathbb{Z})$$

gilt

$$f(z) = f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$$

**Bemerkung 8.15.** Da eine Modulfunktion insbesondere invariant gegenüber den Erzeugenden  $T$  und  $J$  der Modulgruppe  $PSL_2(\mathbb{Z})$  sind, genügt es, die Funktionswerte in folgendem Fundamentalbereich zu kennen:

$$F = \left\{ \tau \in \mathbb{H} \mid |\tau| \geq 1 \text{ und } \operatorname{Re}(\tau) \leq \frac{1}{2} \right\}$$



Die folgende Eigenschaft der  $j$ -Funktion erklärt ihren zusätzlichen Namen  $j$ -Invariante.

**Proposition 8.16.** Die  $j$ -Funktion ist eine Modulfunktion, also invariant gegenüber Möbius-Transformationen der Modulgruppe  $PSL_2(\mathbb{Z})$ . Das heißt, für alle

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL_2(\mathbb{Z})$$

gilt

$$j(\tau) = j\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)$$

Insbesondere folgt aus  $j(\tau) = j(\tau + 1)$ , dass die  $j$ -Funktion periodisch ist. Sie besitzt daher eine Fourier-Darstellung.

**Theorem 8.17.** Die  $j$ -Funktion besitzt mit  $q = e^{2\pi i\tau}$  die Fourier-Darstellung

$$\begin{aligned} j(q) &= \frac{1}{q} + 744 + 196\,884\,q + 21\,493\,760\,q^2 + \dots \\ &=: \frac{1}{q} + 744 + \sum_{n \geq 1} c_n q^n \end{aligned}$$

und alle Koeffizienten  $c_n$  sind natürliche Zahlen.

## 8.2 Monstrous Moonshine

Es gibt eine höchst erstaunliche Beziehung der  $j$ -Funktion zur Monster-Gruppe  $F_1$ , der größten sporadischen endlichen einfachen Gruppe. Diese Beziehung nennt man "monstrous moonshine". Für eine kurze Einführung siehe Tatitscheff [Tat19].

Dabei heißt eine nicht-triviale Gruppe  $G$  einfach, wenn sie nur die trivialen Normalteiler (also 1 und  $G$ ) besitzt. Es gilt der Satz von Jordan-Hölder.

**Theorem 8.18.** a) Jede endliche Gruppe besitzt eine Kompositionsreihe, das heißt eine Folge von Untergruppen  $G = G_0 > G_1 > \dots > G_r > G_{r+1} = 1$ , so dass  $G_{i+1}$  Normalteiler von  $G_i$  ist, und alle "Kompositionsfaktoren"  $G_i/G_{i+1}$  sind einfach.

b) Für zwei Kompositionsreihen von  $G$  stimmen die Kompositionsfaktoren bis auf Permutation und Isomorphie überein.

Dies kann man als Analogon zur eindeutigen Primfaktorzerlegung einer natürlichen Zahl sehen, wobei für Gruppen i.A. allerdings noch verschiedene Arten des "Zusammenbauens" der Kompositionsfaktoren möglich sind.

In einer gigantischen internationalen Anstrengung von hunderten Mathematikern und entsprechend vielen Forschungsarbeiten (man schätzt den Gesamtumfang auf 15.000 Seiten) wurden Ende des letzten Jahrhunderts alle endlichen einfachen Gruppen klassifiziert:

Jede solche Gruppe gehört entweder zu einer von 18 unendlichen Familien, oder ist isomorph zu einer der 26 sporadischen einfachen Gruppen.

Die erste Familie besteht aus den zyklischen Gruppen  $\mathbb{Z}/p$  von Primzahlordnung, die zweite Familie aus den alternierenden Gruppen  $A_n$  (für  $n > 4$ ), die dritte Familie bilden die projektiv-linearen Gruppen  $PSL_n(p)$  über endlichen Körpern. Die weiteren Familien sind Gruppen vom Lie-Typ über endlichen Körpern.

Die sporadischen Gruppen sind dagegen Ausnahmestrukturen, die in keine der 18 Familien passen. Die kleinste dieser Gruppen ist die Mathieu-Gruppe  $M_{11}$  von Ordnung 7.920 (1861 entdeckt von E. Mathieu), die größte ist die Monstergruppe  $F_1$  mit

808.017.424.794.512.875.886.459.904.961.710.757.005.754.368.000.000.000  $\approx 8 \cdot 10^{53}$  Elementen. Ihre Existenz wurde 1973 von B. Fischer und R. Griess vorhergesagt, aber erst 1980 endgültig von R. Griess konstruktiv bewiesen. Sie kann als Automorphismengruppe der Griess-Algebra  $V_2$  dargestellt werden, einer 196.884-dimensionalen reellen Algebra, die kommutativ ist, aber nicht assoziativ. Die Operation von  $F_1$  auf  $V_2$  spaltet einen trivialen Summand ab und das Komplement bildet eine irreduzible Darstellung der Dimension 196.883, der kleinsten nicht-trivialen irreduziblen Darstellung von  $F_1$ . Tatsächlich kennt man schon seit 1978 (vorbehaltlich der Existenz von  $F_1$ ) von allen 194 irreduziblen  $F_1$ -Darstellungen die Dimensionen:

$$r_1 = 1 \quad \text{triviale Darstellung}$$

$$r_2 = 196.883$$

$$r_3 = 21.296.876$$

...

Die Entdeckung der Beziehung "monstrous moonshine" zwischen  $j$  und  $F_1$  begann mit der Beobachtung von J. McKay in 1978, dass  $r_1 + r_2$  genau mit dem linearen  $q$ -Koeffizient  $c_1$  der  $j$ -Funktion übereinstimmt. Weiter gilt für den quadratischen Koeffizient  $c_2 = r_1 + r_2 + r_3$  und auch die höheren Koeffizienten der  $j$ -Funktion können als positiv-ganzzahlige Linearkombinationen der 194 Zahlen  $r_1, r_2, \dots, r_{194}$  dargestellt werden. Daher hat man nach einem Beweis für diesen höchst erstaunlichen zahlentheoretischen Zusammenhang gesucht.

Ende der 80er Jahre hat man mit Ideen aus der Konformen Quantenfeldtheorie die Griess-Algebra zu einer unendlich-dimensionalen graduierten "Vertex-Operator-Algebra"  $V_*$  erweitert, auf der  $F_1$  operiert. Mit diesem "moonshine"-Modul und zusätzlichen, sehr fortgeschrittenen Methoden aus Mathematik und theoretischer Physik konnte R. Borcherds in 1992 alle bis dahin bestehenden Vermutungen zum "monstrous moonshine" beweisen, wofür er 1998 die Fields-Medaille erhielt.

## Glossar

- Abelsche partielle Summation, 40
- Baseler Problem, 15
- Bernoulli-Polynome, 34
- Bernoulli-Zahlen, 34
- Chu-Vandermonde-Identität, 99
- Digamma-Funktion, 23
- Dirichlet-Reihe, 26
- Eisenstein-Reihen, 63
- Eulersche  $\gamma$ -Konstante, 16
- Eulersche Beta-Funktion, 10
- Eulersche Produktformel, 28
- Eulersche Spiegelungsformel, 20
- Fakultät, 4
- Fundamentalsatz der Algebra, 59
- Gaußsche Vervielfachungsformel, 23
- Harmonischen Zahlen, 16
- Hypergeometrische Funktion, 89
- Höldersche Ungleichung, 7
- Integralformel von Cauchy, 59
- Integralsatz von Cauchy, 58
- Konvexität, 6
- Lagrangesche Inversionsformel, 122
- Legendresche Verdoppelungsformel, 21
- Liouvillesche Formel, 86
- Möbius-Transformation, 126
- Pentium Prozessor, 16
- Picard-Lindelöf, 79
- Pochhammer-Symbol, 7
- Residuum, 59
- Riemannsches R-Funktion, 52
- Riemannsches Xi-Funktion, 44
- Stirling, 4
- Theorem von Liouville, 59
- Weierstraßscher Produktsatz, 14
- Zeta-Funktion, 25

## Literaturverzeichnis

- [Beu01] Frits Beukers. Special functions (encyclopedia of mathematics and its applications 71) by george e. andrews, richard askey and ranjan roy: 664 pp., £ 55.00 (us \$85.00), isbn 0-521-62321-9 (cambridge university press, 1999). *Bulletin of the London Mathematical Society*, 33(1):116–127, 2001.
- [BW10] Richard Beals and Roderick Wong. *Special functions: a graduate text*, volume 126. Cambridge University Press, 2010.
- [Eul40] Leonhard Euler. De progressionibus harmonicis observationes. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, 7(1734-35):150–156, 1740.
- [Eul83] Leonhard Euler. De serie lambertina plurimisque eius insignibus proprietatibus. *Acta Academiae scientiarum imperialis petropolitanae*, pages 29–51, 1783.
- [Hav07] Julian Havil. *GAMMA*. Springer Berlin Heidelberg, 2007.
- [Lam58] Johann Heinrich Lambert. Observationes variae in mathesin puram. *Acta Helvetica*, 3(1):128–168, 1758.
- [Tat19] Valdo Tatitscheff. A short introduction to monstrous moonshine. *arXiv preprint arXiv:1902.03118*, 2019.
- [THB86] Edward Charles Titchmarsh and David Rodney Heath-Brown. *The theory of the Riemann zeta-function*. Oxford university press, 1986.
- [Vio16] Carlo Viola. *An introduction to special functions*. Springer, 2016.
- [WG89] ZX Wang and DR Guo. Special functions world scientific publishing co. *Pte. Ltd, Singapore*, 1989.